

IV.

Klein

PROGRAMM

des

Vitzthumschen Gymnasiums,

als

Einladung

zu dem am 7. und 8. April 1865 stattfindenden

öffentlichen Examen,

herausgegeben von

Dr. phil. Karl Scheibe,

Rector und Professor.

Inhalt:

Leichtigkeit kreisförmig gebogener Körper. Vom Oberlehrer Dr. phil.

ERMANN K.

H. Schulnachrichten. Vom Rector.

DRESDEN,

Druck von E. Blochmann & Sohn.

1865.

IV.

PROGRAMM

des

Vitzthumschen Gymnasiums,

als

Einladung

zu dem am 7. und 8. April 1865 stattfindenden

öffentlichen Examen,

herausgegeben von

Dr. phil. Karl Scheibe,

Rector und Professor.

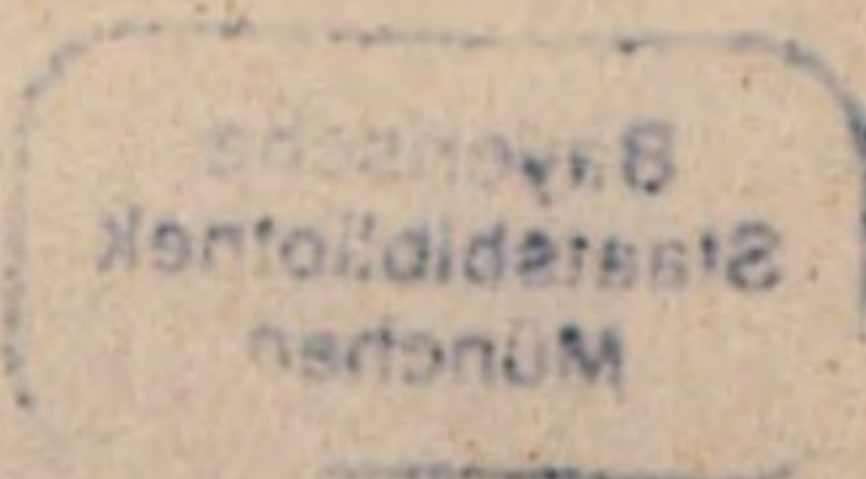
Inhalt:

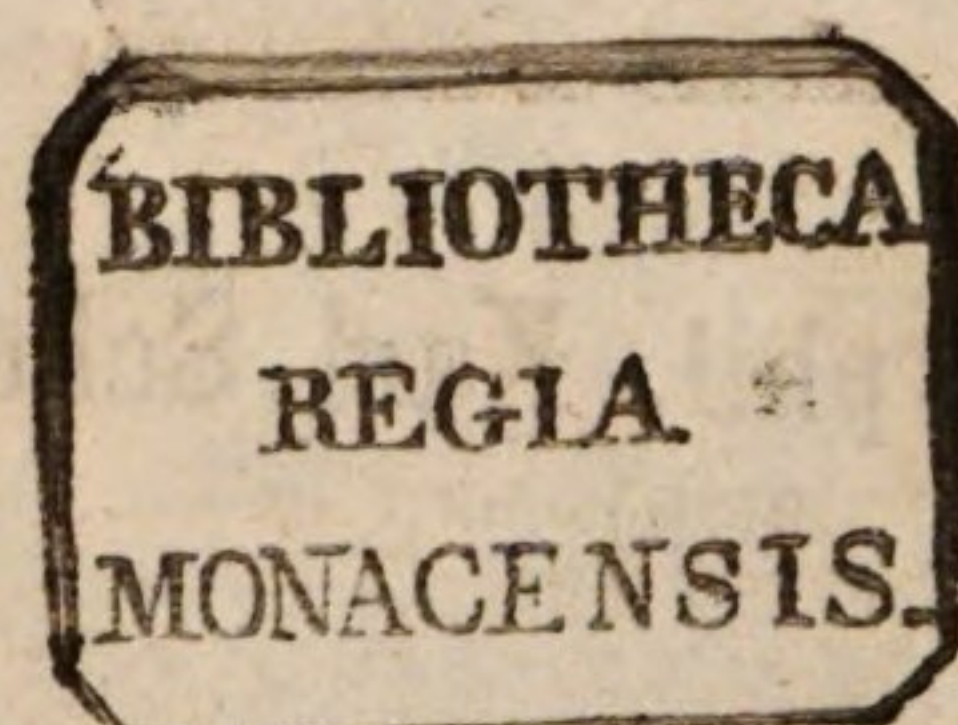
- I. Festigkeit kreisförmig gebogener Körper. Vom Oberlehrer Dr. phil.
HERMANN KLEIN.
II. Schulnachrichten. Vom RECTOR.

DRESDEN,

Druck von E. Blochmann & Sohn.

1865.





I.

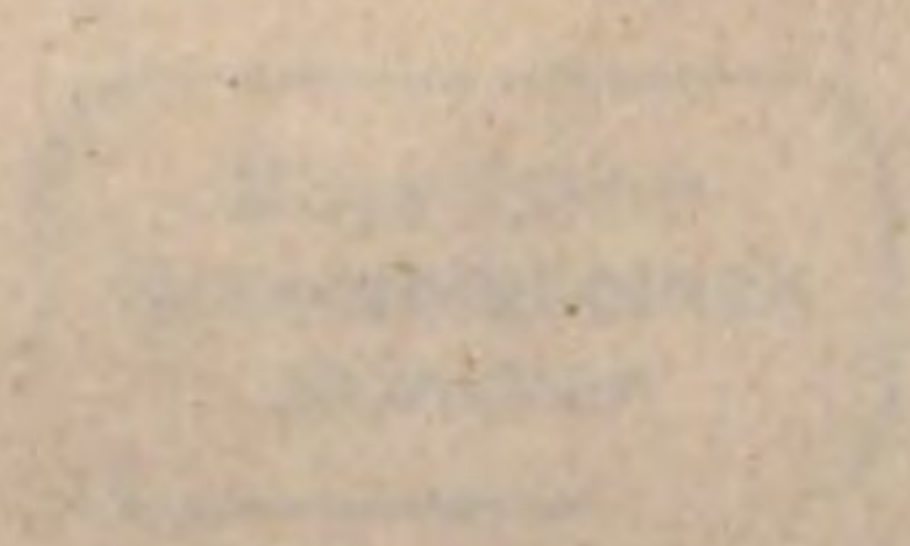
Festigkeit kreisförmig gebogener Körper.

Vom

Oberlehrer Dr. phil. **Hermann Klein.**

I.
Festigkeit der Körper.
Körper.

Opusculum de solidis et liquidis.



§ 1.

In der vorliegenden Abhandlung soll eine Anwendung der Gleichungen der Theorie der Elasticität auf bestimmte Körperformen, die in der Praxis Anwendung finden, gemacht werden. Vorausgesetzt wird, dass die Körper aus nichtkrystallinischer, homogener Substanz bestehen. Die Körper sollen Cylinder sein und zwar so, dass die Querschnitte Kreise sind, ferner sollen sie kreisförmig gebogen sein, aber so, dass der Halbmesser dieser Krümmung (a) gross ist gegen den Halbmesser des Querschnittskreises (e). Am Ende dieser Körper soll eine Kraft (P) wirken, und zwar immer in der Ebene des Kreises, nach dem der Körper gebogen ist, so dass wir überall eine Krümmung in einer Ebene erhalten. Folgende drei Fälle werden bearbeitet. Der Körper bilde einen Halbkreis, Viertelkreis, ganzen Kreis. Die auf den Körper wirkende Kraft P greife in den beiden ersten Fällen an dem einen Ende des Körpers, der mit dem anderen befestigt ist, an und ziehe in der Richtung des Halbmessers nach dem Angriffspunkte. Bei dem dritten Falle wirke die Kraft P dem Befestigungspunkte diametral gegenüber und auch in der Richtung des Halbmessers nach dem Angriffspunkte.

Anm. Bei dieser Untersuchung ist das Werk von Clebsch, „Theorie der Elasticität fester Körper“, zu Grunde gelegt.

Mit E werde im Folgenden der Elasticitätsmodul bezeichnet, d. h. der reciproke Werth der Verlängerung, welche die Längeneinheit erfährt, wenn der Körper der Einheit der Zugkraft auf jede Querschnittseinheit unterworfen wird, oder diejenige Kraft, welche die Länge eines Körpers, dessen Querschnitt die Einheit ist, um seine Länge ausdehnt.

Die Elasticitätskräfte, zerlegt nach den drei Kanten eines rechtwinkligen Parallelepipeds auf die drei Ebenen desselben, seien bezeichnet mit

$$t_{11}, t_{12}, t_{13}; \quad t_{21}, t_{22}, t_{23}; \quad t_{31}, t_{32}, t_{33},$$

von denen je zwei einander gleich sind, nämlich

$$t_{12} = t_{21}, \quad t_{31} = t_{13}, \quad t_{23} = t_{32}.$$

§ 2.

Wir nehmen vorläufig an, der Körper, dessen Biegung untersucht werden soll, sei gerade und suchen die Grösse und Richtung der Kraft, welche an jedem Elemente wirken müsste, um demselben die Form eines Kreisbogens zu ertheilen, und lassen dann ausser dieser Kraft die gegebene P vorgeschriebenermassen wirken. Bei der ersteren Untersuchung ist abzusehen von jeder Verschiebung senkrecht zur Längsaxe des Körperelementes, so dass also alle Punkte, welche in einem Querschnitte senkrecht zur Längsaxe liegen, nach der Biegung in denselben Abständen vom Mittelpunkte, der nach unserer Annahme mit dem Schwerpunkte zusammenfällt, bleiben. Ferner soll die Axe des Körperelementes nur gebogen werden und keine Längenausdehnung erleiden. Das Körperelement werde bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen z -Axe mit der Längsrichtung der Axe des Elementes, welche Richtung dann die Tangente an dem Kreisbogen der Axe ist, zusammenfällt, und dessen x -Axe senkrecht darauf steht, so dass die Krümmung in

der xz -Ebene stattfindet. Der Anfang des Coordinatensystems liegt allemal im Anfang des Elementes. Das Körperelement soll so mit dem vorhergehenden zusammenhängen, dass die Endfläche keine Verschiebung erleidet, oder mit anderen Worten, dass alle Punkte eines Querschnittes senkrecht zur Axe nach der Biegung in einer Ebene senkrecht zur Biegungslinie liegen. Die Verschiebungen eines Punktes, dessen Coordinaten x , y und z sind, nach den Coordinatenaxen seien u , v und w . Von diesen Verschiebungen brauchen wir aber nach der obigen Annahme nur u und w zu berücksichtigen; denn die v müssen immer verschwinden. Diese Grössen u und w sind, da sie im Allgemeinen für jeden Punkt verschiedene Werthe haben, Funktionen von x und z . Es sind dann die Verschiebungen der Längeneinheit nach x und z $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dw}{dz}$. Nach unserer Annahme ist für $z = 0$ auch $u = w = 0$.

Unserer Aufgabe gemäss müssen wir nun das Problem von de Saint-Venant*) folgendermassen fassen: Welches sind die Gleichgewichtszustände eines cylindrischen Körpers, auf dessen cylindrischer Oberfläche keine Kräfte wirken und dessen Inneres keinen äusseren Kräften unterworfen ist, bei welchem die den Körper zusammensetzenden Fasern keinerlei seitlichen Druck erleiden und bei welchem die Axe, sowie jede der Axe parallele Faser in Form einer Kreislinie gekrümmt ist; welches sind die Kräfte, die auf die freie Endfläche wirken müssen, um diesen Zustand hervorzubringen?

Da es nach unserer Annahme keinen seitlichen Druck oder Zug geben soll, so müssen verschwinden t_{11} , t_{22} , t_{12} , und da nur eine Biegung in der xz -Ebene stattfinden soll, so muss

*) Mémoire sur la torsion des prismes avec des considérations sur leur flexion, etc. Savants étrangers, tome XIV (1856), lu le 13 juin 1853.

Mémoire sur la flexion des prismes, etc. Liouville Journ. IIIème série, Tome I (1856).

auch t_{23} verschwinden, so dass nur die Spannungen t_{13} und t_{33} übrig bleiben.

Die Kraft t_{33} , welche eine Ausdehnung oder Zusammenziehung hervorbringt, lässt sich wie folgt berechnen

$$1 : \frac{dw}{dz} = E : t_{33}$$

mithin

$$t_{33} = E \frac{dw}{dz}.$$

Die Bedingung, dass eine seitliche Zusammenziehung nicht stattfinden kann, ist ausgedrückt durch folgende Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad (1.)$$

Mit Benutzung dieser beiden Werthe erhalten wir aus den allgemeinen elastischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dt_{11}}{dx} + \frac{dt_{12}}{dy} + \frac{dt_{13}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dt_{21}}{dx} + \frac{dt_{22}}{dy} + \frac{dt_{23}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dt_{31}}{dx} + \frac{dt_{32}}{dy} + \frac{dt_{33}}{dz} = 0,$$

zur Bestimmung der t_{13} und t_{33} folgende Gleichungen:

$$\frac{dt_{13}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dt_{13}}{dx} + \frac{dt_{33}}{dz} = 0,$$

⊙.

Um hierdurch die Verschiebungen zu berechnen, benutzen wir die Gleichungen, welche für nichtkrystallinische, homogene Mittel die Kräfte durch die Verschiebungen ausdrücken:

$$t_{11} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right\}, \quad t_{23} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right),$$

$$t_{22} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{dv}{dy} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right\}, \quad t_{31} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right),$$

$$t_{33} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \frac{dw}{dz} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Theta \right\}, \quad t_{12} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$

$$\text{wo } \Theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \text{ ist.}$$

Diese Werthe in $\odot$ eingesetzt, geben folgende Bedingungen:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dx dz} = 0. \quad (2.)$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = 0. \quad (3.)$$

Aus (1.) folgt zunächst, dass u von x unabhängig ist. Differenzirt man (2.) nach x , so findet man mit Berücksichtigung von (1.)

$$\frac{d^3 w}{dx^2 dz} = 0 \text{ oder } \frac{d^2 \left(\frac{dw}{dz} \right)}{dx^2} = 0.$$

Es kann mithin in $\frac{dw}{dz}$ nach (3.) z nicht enthalten sein und nach der letzten Gleichung auch von x keine höheren Potenzen, als die erste, es bleibt sonach für $\frac{dw}{dz}$ nur folgende Form übrig:

$$\frac{dw}{dz} = a + a_1 x.$$

Hiernach und nach (1.) erhalten wir durch Integration die folgenden Ausdrücke von u und w :

$$u = \gamma,$$

$$w = c + az + a_1 xz.$$

Hier ist aber c und γ nicht constant, sondern in c kann noch x und in γ noch z enthalten sein. Setzt man diese Werthe, um c und γ zu bestimmen, in die zu erfüllende Gleichung (2.) ein, so erhält man

$$\frac{d^2 \gamma}{dz^2} = -a_1,$$

daraus folgt durch Integration

$$u = \gamma = \alpha_2 + \alpha_1 z - \frac{1}{2} a_1 z^2$$

$$w = c + az + a_1 xz.$$

Nach der Annahme für die Befestigung muss $u = 0$ sein, wenn $z = 0$ ist, folglich muss $\alpha_2 = 0$ sein. Es ist ferner für $z = 0$ immer $w = 0$, mithin muss $c = 0$ sein, also

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 z - \frac{1}{2} a_1 z^2 \\ w &= a z + a_1 x z. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man ferner, dass die Axe des Körpers nicht ausgedehnt werden soll, so muss $a = 0$ sein; denn $w = a z$ würde eine Ausdehnung der Axe bedeuten.

Zur Bestimmung der noch übrig bleibenden Constanten α_1 und a_1 bedenke man, dass die Axe des ursprünglich geraden Stabes in Form eines Kreisbogens gebogen werden soll. Bezeichnen wir desshalb mit x' und z' die laufenden Coordinaten der Biegungslinie, so ist mit Berücksichtigung der gefundenen Werthe von u und w

$$\begin{aligned} x' &= x + u = x + \alpha_1 z - \frac{1}{2} a_1 z^2 \\ z' &= z + w = z + a_1 x z. \end{aligned}$$

Wir eliminiren, um die Gleichung der Linie irgend einer ursprünglich der Axe parallelen Faser zu erhalten, aus den beiden Gleichungen z , indem wir den Werth dieser Grösse aus der zweiten Gleichung berechnen und in die erste einsetzen:

$$x' = x + \alpha_1 \frac{z'}{1 + a_1 x} - \frac{1}{2} a_1 \left(\frac{z'}{1 + a_1 x} \right)^2$$

Setzen wir hierin $x = 0$, so erhalten wir die Gleichung der Linie, welche nach der Biegung die Axe des Cylinders hat, d. i.

$$x' = \alpha_1 z' - \frac{1}{2} a_1 z'^2.$$

Es ist nun die Gleichung eines Kreises bezogen auf dasselbe Coordinatensystem, wenn die z' -Axe Tangente und a der Halbmesser ist:

$$z'^2 = x' (2a - x').$$

Da wir aber hier nur Elemente nehmen, so können wir x' gegen $2a$ vernachlässigen und erhalten

$$z'^2 = 2ax'.$$

Dieser Form können wir unsere gefundene gleich machen, indem wir setzen

$$\alpha_1 = 0 \text{ und } a_1 = -\frac{1}{2a},$$

so dass nun die unseren Bedingungen entsprechenden Werthe der Verschiebungen sind

$$u = \frac{1}{2a}z^2, \quad w = -\frac{1}{a}xz.$$

Daraus findet man, dass ausser den schon angeführten elastischen Kräften auch noch $t_{13} = 0$ ist und

$$t_{33} = -\frac{E}{a}x,$$

d. h. es ist, da dies nun für jedes Element gilt, eine Kraft vorhanden, parallel der Tangente an jedes Element, die in der Axe $= 0$ ist und zu beiden Seiten entgegengesetzt und zwar für positive x ein Druck, wodurch eine Verkürzung der Fasern, und für negative x ein Zug, wodurch eine Ausdehnung hervorgerufen wird.

Man kann sich nun auch durch eine leichte Rechnung überzeugen, dass jeder Querschnitt bei dieser Biegung eben bleibt, indem man nämlich in den Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x + u \\ z' &= z + w \end{aligned}$$

z constant setzt und x eliminirt. Diese Elimination giebt

$$z' = z + \frac{1}{2a^2}z^3 - \frac{1}{a}zx'.$$

§ 3.

Wir kehren nun das Problem des vorigen Paragraphen um und stellen folgende Aufgabe. Ein Stab sei kreisförmig gekrümmt und zwar sei seine Länge so gross, dass er durch die Krümmung ein Halbkreis geworden ist. Der Halbkreis ist mit dem einen Ende befestigt und am andern Ende wirkt die Kraft P nach der in § 1 angegebenen Weise. Es sollen berechnet werden die hervorgebrachten Verschiebungen. Wir betrachten erst ein Element und zwar werden wir, um auf das Vorhergehende zurückkommen zu können, dieses auf folgendes Coordinatensystem beziehen. Die Tangente an den Kreis sei die z -Axe und senkrecht darauf die x -Axe. Nach der Art der Aufgabe ist selbstverständlich, dass die Biegung nur stattfinden kann in der xz -Ebene, so dass also für $y = 0$ auch $v = 0$ sein muss. Der Bogen bis zum Anfangspunkt der Coordinaten sei s . Um die Verschiebungen im Elemente zu erhalten, denken wir uns das Element vorläufig gerade. Die am Ende des ganzen Körpers wirkende Kraft P zerlegen wir in die Componenten und Momente in Bezug auf die Coordinatenachsen. Die Componente nach x ist $P \cos \frac{s}{a}$, nach y ist sie $= 0$, nach z ist sie $P \sin \frac{s}{a}$. Die Drehungsmomente um x und z verschwinden nur das um y existirt, es ist $a P \sin \frac{s}{a}$. Wir müssen nun die elastischen Spannungen durch diese gegebenen Werthe ausdrücken; denn dadurch bekommen wir Gleichungen, mit Hülfe deren sich die Constanten bestimmen lassen, welche in den allgemeinen Ausdrücken von u und w vorkommen. Die Art der Befestigung, oder, da wir von einem Elemente sprechen, die Art des Zusammenhanges dieses Elementes mit dem vorhergehenden soll durch Folgendes bestimmt sein. Der Anfangspunkt soll fest bleiben und ein Element des ersten Querschnittes, und zwar sei

es das dem Koordinatenanfang benachbarte, bleibe in dem ursprünglichen Querschnitte, also in der xy -Ebene, ferner bleibe das dem Koordinatenanfang benachbarte Linienelement nach der x -Axe hin in seiner anfänglichen Lage. Diese Bedingungen müssen nun durch die u, v, w ausgedrückt werden. Die erste bedeutet, dass für $x = y = z = 0$ auch $u = v = w = 0$ ist. Da u, v, w Funktionen von x, y, z sind, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz, wenn höhere Potenzen von dx, dy, dz vernachlässigt werden

$$u + du = u + \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

$$v + dv = v + \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz,$$

$$w + dw = w + \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz;$$

darnach erhält man, weil dann $dz = 0$ ist, für $x = y = z = 0$ $\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} = 0$, und wegen der dritten Bedingung, weil dann dz und $dy = 0$ ist, auch $\frac{dv}{dx} = 0$.

Da keine seitlichen Druck- oder Zugkräfte vorkommen, so muss $t_{11} = t_{22} = t_{12} = 0$ sein.

Zur Bestimmung der ausdehnenden Kraft t_{33} haben wir dieselbe Gleichung wie oben

$$t_{13} = E \frac{dw}{dz}.$$

Von der eintretenden Quercontraction können wir hier nicht absehen, mithin ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = -\mu \frac{dw}{dz} \quad (1.)$$

wo μ den von Cogniard-Latour und Wertheim auf experimentalem Wege bestimmten Werth $\frac{1}{3}$ oder den von Poisson auf theoretischem Wege gefundenen Werth $\frac{1}{4}$ hat. Die Be-

stimmung, dass keine seitliche Verschiebung stattfinden soll, also $t_{12} = t_{21} = 0$, giebt

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0 \quad (2.)$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (1.) und (2.) gehen die allgemeinen § 2 citirten Gleichungen zwischen den elastischen Kräften über in folgende einfachere:

$$\frac{dt_{13}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dt_{23}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dt_{13}}{dx} + \frac{dt_{23}}{dy} + \frac{dt_{33}}{dz} = 0.$$

Mit Hülfe der allgemeinen Werthe der Spannungen und der obigen Bedingung (1.) können diese Gleichungen in folgende verwandelt werden:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2w}{dx dz} = 0, \quad (3.)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d^2w}{dy dz} = 0, \quad (4.)$$

$$2 \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} = 0. \quad (5.)$$

Für die Spannungen bleiben noch drei Gleichungen an der Oberfläche zu erfüllen, da die Seiten der begrenzenden Fasern keinen Kräften von aussen unterworfen sind. Die allgemeine Form dieser drei Gleichungen ist

$$t_{11} \cos p + t_{12} \cos q + t_{13} \cos r = 0,$$

$$t_{21} \cos p + t_{22} \cos q + t_{23} \cos r = 0,$$

$$t_{31} \cos p + t_{32} \cos q + t_{33} \cos r = 0,$$

wo p, q, r die Winkel bedeuten, welche die nach aussen gerichtete Normale der Fläche gegen die Coordinatenaxen bildet. Berücksichtigt man nun, dass die Normale auf das Element des

prismatischen Körpers senkrecht zur jedesmaligen z -Axe steht, ferner, dass die Winkel der Normale mit der jedesmaligen x - und y -Axe Complementwinkel sind, so findet man, dass $q = 90 - p$ und $r = 90^\circ$ ist. Da ferner $t_{11} = t_{22} = t_{12} = 0$ ist, so bleibt nur eine Gleichung für die Oberfläche übrig, nämlich

$$t_{13} \cos p + t_{23} \sin p = 0$$

oder

$$\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right) \cos p + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) \sin p = 0.$$

Die Bedingungen, welchen die Verschiebungen genügen müssen, sind also zunächst die Gleichungen (1) bis (5), aus denen zuerst $\frac{dw}{dz}$ zu finden ist; denn haben wir einmal einen Werth von $\frac{dw}{dz}$ gefunden, so kennen wir $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dy}$ nach der Gleichung (1).

Differenzirt man (5.) nach z , so ist

$$2 \frac{d^3 w}{dz^3} + \frac{d^3 w}{dx^2 dz} + \frac{d^3 w}{dy^2 dz} = 0.$$

Aus (3) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dx^2 dz} &= - \frac{d^3 w}{dx dz^2} \\ &= \mu \frac{d^3 w}{dz^3} \text{ nach (1).} \end{aligned}$$

Aus (4) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d^3 w}{dy^2 dz} &= - \frac{d^3 v}{dz^2 dy} \\ &= \mu \frac{d^3 w}{dz^3} \text{ nach (1).} \end{aligned}$$

Setzt man die beiden letzten erhaltenen Werthe in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$2 (1 + \mu) \frac{d^3 w}{dz^3} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^3 w}{dz^3} = 0;$$

differenzirt man (3) nach y und (4) nach x , so giebt deren

Summe, wenn man die (2) zweimal nach z differenziert und den erhaltenen Werth berücksichtigt,

$$\frac{d^3 w}{dx dy dz} = 0;$$

differenziert man (5) nach z und berücksichtigt $\frac{d^3 w}{dz^3} = 0$, so erhält man

$$\frac{d^3 w}{dz dx^2} + \frac{d^3 w}{dz dy^2} = 0;$$

differenziert man (3) nach x und (4) nach y und setzt die erhaltenen Werthe einander gleich, so muss mit Berücksichtigung von (1) sein

$$\frac{d^3 w}{dz dx^2} = \frac{d^3 w}{dz dy^2},$$

was nach der vorigen Bedingung nur möglich ist, wenn beide Werthe $= 0$ sind.

Die von w zu erfüllenden Bedingungen sind demnach folgende:

$$\frac{d^2}{dz^2} \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{d^2}{dy^2} \frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{d^2}{dx dy} \frac{dw}{dz} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir

$$\frac{dw}{dz} = \alpha + a_1 x + a_2 y + z (b + b_1 x + b_2 y)$$

und mithin aus Bedingung (1)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\mu \{ \alpha + a_1 x + a_2 y + z (b + b_1 x + b_2 y) \} \\ \frac{dv}{dy} &= -\mu \{ \alpha + a_1 x + a_2 y + z (b + b_1 x + b_2 y) \} \end{aligned}$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$w = F(x, y) + \alpha z + a_1 x z + a_2 y z + \frac{1}{2} z^2 (b + b_1 x + b_2 y)$$

$$u = \varphi(y, z) -$$

$$\mu \{ \alpha x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_2 x y + z (b x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + b_2 x y) \}$$

$$v = \chi(x, z) - \mu \left\{ \alpha y + a_1 x y + \frac{1}{2} a_2 y^2 + z (b y + b_1 x y + \frac{1}{2} b_2 y^2) \right\}$$

Führt man diese Werthe in die Bedingungen (3) und (4) ein, so erhält man

$$\frac{d^2 \varphi(y, z)}{dz^2} = -a_1 - b_1 z$$

$$\frac{d^2 \chi(x, z)}{dz^2} = -a_2 - b_1 z$$

und durch deren Integration

$$\varphi(y, z) = -\frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3 + \varrho z + \vartheta$$

$$\chi(x, z) = -\frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^3 + \varrho' z + \vartheta'$$

wo ϱ, ϑ noch y und ϱ', ϑ' noch x enthalten können.

$$u = -\mu \left\{ \alpha x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_2 x y + z (b x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + b_2 x y) \right\} \\ - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3 + \varrho z + \vartheta$$

$$v = -\mu \left\{ \alpha y + \frac{1}{2} a_1 x y + \frac{1}{2} a_2 y^2 + z (b y + \frac{1}{2} b_1 x y + \frac{1}{2} b_2 y^2) \right\} \\ - \frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^3 + \varrho' z + \vartheta'.$$

Die Bedingung (2) giebt Aufschluss über die Grössen ϱ und ϑ . Es kann nämlich darnach y in u und x in v höchstens in der zweiten Potenz vorkommen, also

$$\varrho = b'_1 y + b'_2 y^2 + b'_3, \quad \vartheta = a'_1 y + a'_2 y^2,$$

$$\varrho' = b''_1 x + b''_2 x^2 + b''_3, \quad \vartheta' = a''_1 x + a''_2 x^2,$$

und die Art der Befestigung giebt wieder, dass keine Constante hinzukommen darf. Mithin

$$u = -\mu \left\{ \alpha x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_2 x y + z (b x + \frac{1}{2} b_1 x^2 + b_2 x y) \right\} \\ - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3 + b'_1 y z + b'_2 y^2 z + b'_3 z + a'_1 y + a'_2 y^2$$

$$v = -\mu \left\{ \alpha y + \frac{1}{2} a_1 x y + \frac{1}{2} a_2 y^2 + z (b y + \frac{1}{2} b_1 x y + \frac{1}{2} b_2 y^2) \right\} \\ - \frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^3 + b''_1 x z + b''_2 x^2 z + b''_3 z + a''_1 x + a''_2 x^2.$$

Die Bedingung (2) führt noch durch Gleichsetzung der Coefficienten auf sechs Gleichungen zwischen den eingeführten Constanten, so dass endlich

$$\begin{aligned}
u &= -\mu (\alpha x + \frac{1}{2} a_1 [x^2 - y^2] + a_2 xy) - \\
&\quad \mu z (b x + \frac{1}{2} b_1 [x^2 - y^2] + b_2 xy) + \\
&\quad b'_1 yz - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3 + a'_1 y + b'_3 z, \\
v &= -\mu (\alpha y + a_1 xy + \frac{1}{2} a_2 [y^2 - x^2]) - \\
&\quad \mu z (b y + b_1 xy + \frac{1}{2} b_2 [y^2 - x^2]) - b'_1 xz - \\
&\quad \frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^3 - a'_1 x + b''_3 z.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Werthes w bleibt noch die letzte Bedingung zu erfüllen, so dass man erhält

$$\frac{d^2 F(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 F(x, y)}{dy^2} + 2(b + b_1 x + b_2 y) = 0.$$

Diese Werthe vereinfachen sich aber noch durch folgende, für unseren Fall, nach dem die Biegung in der xz -Ebene stattfinden soll, einzuführende Bedingung, dass für $y = 0$ auch $v = 0$ sein muss, hieraus folgt

$$0 = \frac{1}{2} a_2 \mu x^2 + \frac{1}{2} b_2 \mu x z^2 - b'_1 x z - \frac{1}{2} a_2 z^2 - \frac{1}{6} b_2 z^2 - a'_1 x + b''_3 z$$

also ist

$$a_2 = b_2 = b'_1 = a'_1 = b''_3 = 0,$$

mithin

$$\begin{aligned}
u &= -\mu (\alpha x + \frac{1}{2} a_1 [x^2 - y^2]) - \mu z (b x + \frac{1}{2} b_1 [x^2 - y^2]) \\
&\quad - \frac{1}{2} a_1 z^2 - \frac{1}{6} b_1 z^3 + b'_3 z,
\end{aligned}$$

$$v = -\mu (\alpha y + a_1 xy) - \mu z (b y + b_1 xy),$$

$$w = F(x, y) + \alpha z + a_1 xz + \frac{1}{2} z^2 (b + b_1 x)$$

$$\frac{d^2 F(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 F(x, y)}{dy^2} + 2(b + b_1 x) = 0.$$

Die Bestimmung von $F(x, y)$ vereinfachen wir uns, indem wir setzen

$$F(x, y) = \Omega(x, y) - (b \frac{x^2 + y^2}{2} + b_1 xy^2) - b'_3 x,$$

wo Ω keine Constante wegen der Befestigung und des Zu-

sammenhanges der Elemente enthalten kann. Damit vereinfacht sich die durch $F(x, y)$ zu erfüllende Bedingung in

$$\frac{d^2 \Omega(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 \Omega(x, y)}{dy^2} = 0.$$

Von dieser Funktion Ω lässt sich nachweisen*), dass sie völlig bestimmt ist, indem man annimmt, dass es zwei verschiedene Werthe geben könne und deren Differenz sucht. Diese Differenz kann dann nur eine Constante sein, woraus hervorgeht, dass die verschiedenen Ω nur durch Constante verschieden sein können; die Constante aber ist durch andere gegebene Bedingungen bestimmt, so ist sie hier immer $= 0$. Wir können demnach jede gefundene Form, die allen Bedingungen entspricht, als die nothwendige betrachten. Eine solche Form ist nun

$$\Omega(x, y) = bB(x, y) + b_1B_1(x, y)$$

wo sein muss

$$\frac{d^2 B(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 B_1(x, y)}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 B_1(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 B_1(x, y)}{dy^2} = 0.$$

Es muss aber auch durch diess Ω die vorhandene Grenzbedingung erfüllt werden, also

$$\begin{aligned} & (b \frac{dB}{dy} + b_1 \frac{dB_1}{dy} - \mu [by + b_1 xy] - by - 2b_1 xy) \sin p + \\ & (b \frac{dB}{dx} + b_1 \frac{dB_1}{dx} - \mu [bx + \frac{1}{2} b_1 (x^2 - y^2)] - bx - b_1 y^2) \cos p = 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingung muss in zwei zerfallen, da es für jedes b und b_1 gelten muss, d. h. es muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dx} \cos p + \frac{dB}{dy} \sin p &= (\mu + 1) [x \cos p + y \sin p], \\ \frac{dB_1}{dx} \cos p + \frac{dB_1}{dy} \sin p &= (\frac{1}{2} \mu (x^2 - y^2) + y^2) \cos p + (\mu - 2) \\ &\quad xy \sin p. \end{aligned}$$

*) Clebsch, § 24.

Bedenken wir nun, dass nach der gegebenen Form des Körpers

$$\cos p = \frac{x}{e}, \quad \sin p = \frac{y}{e} \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = e^2$$

ist, so verwandelt sich die erste Gleichung in die folgende

$$\frac{dB}{dx}x + \frac{dB}{dy}y = (\mu + 1)e.$$

Eine solche Funktion B kann nicht existiren. Es kann demnach den obigen Bedingungen nur genügt werden, wenn $b = 0$ gesetzt wird, wodurch sich die Werthe der Verschiebungen weiter so vereinfachen, dass nur noch die Constanten α , b_1 , a_1 , b'_3 unbestimmt bleiben, nämlich

$$u = -\mu(\alpha x + \frac{1}{2}a_1[x^2 - y^2]) - \mu z \frac{1}{2}b_1[x^2 - y^2] - \frac{1}{2}a_1z^2 - \frac{1}{6}b_1z^3 + b'_3z,$$

$$v = -\mu(\alpha y + a_1xy) - \mu b_1xyz,$$

$$w = -b_1B_1 - b_1xy^2 + \alpha z + a_1xz + \frac{1}{2}b_1xz^2 - b'_3x.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungen erhält man nun folgende Werthe derselben:

$$t_{11} = t_{22} = t_{12} = 0,$$

$$t_{33} = E[\alpha + a_1x + b_1xz],$$

$$t_{13} = \frac{E}{2(1+\mu)}[b_1\frac{dB_1}{dx} - b_1y^2 - \mu\frac{1}{2}b_1(x^2 - y^2)],$$

$$t_{23} = \frac{E}{2(1+\mu)}[b_1\frac{dB_1}{dy} - 2b_1xy - \mu b_1xy].$$

Die zu erfüllende Grenzbedingung geht über in

$$\left(b_1\frac{dB_1}{dy} - b_1(\mu + 2)xy\right)\sin p + \left(b_1\frac{dB_1}{dx} - b_1\frac{\mu x^2 + (2-\mu)y^2}{2}\right)\cos p = 0.$$

Um nun noch die darin vorkommende unbekannte Funktion zu finden, können wir folgendermassen verfahren*). Einer Differentialgleichung von der Form, wie sie B_1 erfüllen muss, nämlich $\frac{d^2 B_1}{dx^2} + \frac{d^2 B_1}{dy^2} = 0$ wird Genüge geleistet durch die Summe einer beliebigen Funktion von $x + y \sqrt{-1}$ und einer von $x - y \sqrt{-1}$. Es genügen z. B. Summe und Differenz gleich hoher Potenzen von $x + y \sqrt{-1}$ und $x - y \sqrt{-1}$ mit beliebigen Constanten multiplicirt. Bildet man diese Summen und Differenzen für die 0^{te}, 1^{te}, 2^{te} Potenz, multiplicirt jedesmal mit einer beliebigen Constanten, so erhält man

$$B_1 = \alpha + \alpha_1 x + \beta_1 y + \alpha_2 (x^2 - y^2) + \beta_2 xy + \alpha_3 (x^3 - 3xy^2) + \beta_3 (y^3 - 3yx^2) + \dots$$

Zur Bestimmung der Constanten bedienen wir uns der Grenzbedingung, indem wir darin setzen

$$\cos p = \frac{x}{e} \text{ und } \sin p = \frac{y}{e}.$$

Die Einsetzung dieser Werthe giebt

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + 2\alpha_2 x^2 + \alpha_3 (3x^3 - 9xy^2) + \beta_1 y - 2\alpha_1 y^2 + 2\beta_2 xy \dots \\ = \frac{\mu}{2} x^3 + \frac{\mu + 6}{2} xy^2. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung der entsprechenden Coefficienten ergibt sich, dass $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ sein muss. Berücksichtigt man weiter, dass $e^2 = x^2 + y^2$, und entfernt dadurch alle y , so erhält man

$$(\alpha_1 - 9e^2 \alpha_3) x + 12\alpha_3 x^3 = -3x^3 + \frac{\mu + 6}{2} e^2 x$$

und dann durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen zur Bestimmung von α_1 und α_3 folgende Gleichungen

*) Clebsch, § 31.

$$12\alpha_3 = -3 \text{ also}$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{4},$$

$$\alpha_1 - 9e^2\alpha_3 = \frac{\mu+6}{e}e^2 \text{ also}$$

$$\alpha_1 = \frac{2\mu+3}{4}e^2.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung für B_1 ein, so erhalten wir

$$B_1 = \frac{2\mu+3}{4}e^2x - \frac{1}{4}(x^3 - 3xy^2).$$

Die noch zu bestimmenden Constanten werden gefunden, indem man Gleichungen zwischen den Elasticitätskräften und den von aussen wirkenden Kräften herzustellen sucht. Es ist nun, wenn die angedeuteten Integrationen über den ganzen Querschnitt (und zwar nehmen wir den Anfangs-Querschnitt des Elementes, also $z = 0$) ausgedehnt werden

$$\int t_{13} dq \text{ die nach } x \text{ wirkende Kraft}$$

$$\int t_{23} dq \quad - \quad - \quad y \quad - \quad -$$

$$\int t_{33} dq \quad - \quad - \quad z \quad - \quad -$$

$$\int t_{33} y dq \quad \dots \quad \text{das Drehungsmoment um } x,$$

$$\int t_{33} x dq \quad \dots \quad - \quad - \quad - \quad - \quad y,$$

$$\int (t_{23} x - t_{13} y) dq \quad - \quad - \quad - \quad - \quad z.$$

Hierbei hat man zu berücksichtigen, dass die elastischen Kräfte t_{13} , t_{23} , t_{33} so genommen sind, dass sie zusammen dem Systeme der äusseren Kräfte äquivalent sind. Setzt man diese Werthe gleich den gegebenen Kräften, so erhält man zur Bestimmung der Constanten in u , v , w noch folgende Gleichungen:

$$\int t_{13} dq = P \cos s/a,$$

$$\int t_{23} dq = 0,$$

$$\int t_{33} dq = P \sin s/a,$$

$$\int t_{33} y dq = 0,$$

$$\int t_{33} x dq = a P \sin s/a,$$

$$\int (t_{23} x - t_{13} y) dq = 0.$$

Diese Gleichungen gehen durch Einsetzung der oben gewonnenen Werthe der Spannungen über in die folgenden:

$$b_1 \int \frac{dB_1}{dx} dq + \frac{1}{2} b_1 (\mu - 2) \int y^2 dq - \frac{1}{2} b_1 \mu \int x^2 dq = \frac{2(1 + \mu) P \cos s/a}{E},$$

$$b_1 \int \frac{dB_1}{dy} dq - b_1 (\mu + 2) \int x y dq = 0,$$

$$E \alpha \int dq + E a_1 \int x dq = P \sin s/a,$$

$$E \alpha \int y dq + E a_1 \int x y dq = 0,$$

$$E \alpha \int x dq + E a_1 \int x^2 dq = a P \sin s/a,$$

$$b_1 \int x \frac{dB_1}{dy} dq - b_1 (\mu + 2) \int x^2 y dq - b_1 \int y \frac{dB_1}{dx} dq +$$

$$\frac{1}{2} b_1 (\mu + 2) \int y^3 dq + \frac{1}{2} b_1 \mu \int x^2 y dq = 0.$$

Von diesen Integralen müssen viele wegen der Lage des Coordinatensystems verschwinden; denn der Anfangspunkt der Coordinaten ist der Schwerpunkt, mithin ist $\int x dq = 0$ und $\int y dq = 0$, ferner ist das Axensystem xy zugleich ein Haupt-Axensystem des Querschnittes und in Folge dessen ist $\int x y dq = 0$. Es ist ferner wegen des kreisförmigen Quer-

schnittes $\int x^2 dq = \int y^2 dq = \lambda^2 q$, wo sich λ folgendermassen berechnen lässt.

Setzt man

$$x = e \cos \varphi, \quad y = e \sin \varphi,$$

folglich

$$dx = -e \sin \varphi d\varphi, \quad dy = e \cos \varphi d\varphi, \quad \text{so ist}$$

$$\begin{aligned} \int x^2 dq &= \int dy \int x^2 dx = \int \frac{x_1^3 - x_0^3}{3} dy - \frac{2e^4}{3} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{e^4 \pi}{4} = \lambda^2 e^2 \pi, \quad \text{mithin } \lambda^2 = \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

Damit reduciren sich die obigen Gleichungen auf folgende einfachere:

$$b_1 \int \frac{dB_1}{dx} dq + \frac{1}{2} b_1 (\mu - 2) \lambda^2 q - \frac{1}{2} b_1 \mu \lambda^2 q = \frac{2(1 + \mu) P \cos s/a}{E},$$

$$\int \frac{dB_1}{dy} dq = 0,$$

$$E \alpha q = P \sin s/a,$$

$$E \lambda^2 a_1 q = a P \sin s/a,$$

$$\begin{aligned} b_1 \int x \frac{dB_1}{dy} dq - b_1 (\mu + 2) \int x^2 y dq - b_1 \int y \frac{dB_1}{dx} dq + \\ \frac{1}{2} b_1 (\mu + 2) \int y^3 dq + \frac{1}{2} b_1 \mu \int x^2 y dq = 0. \end{aligned}$$

Benutzen wir die zweite dieser Gleichungen, welche durch den oben gefundenen Werth von B_1 erfüllt ist, so bleibt nur

$$b_1 \int \frac{dB_1}{dx} dq - b_1 \lambda^2 q = \frac{2(1 + \mu) P \cos s/a}{E},$$

$$E \alpha q = P \sin s/a,$$

$$E \lambda^2 a_1 q = a P \sin s/a,$$

$$b_1 \int \left(x \frac{dB_1}{dy} - y \frac{dB_1}{dx} \right) dq - b_1 \frac{(\mu + 4)}{2} \int x^2 y dq +$$

$$\frac{1}{2} b_1 (\mu + 2) \int y^3 dq = 0.$$

Es ist ferner

$$\int \frac{dB_1}{dx} dq = \frac{2\mu + 3}{4} e^2 q = (2\mu + 3) \lambda^2 q.$$

Hieraus erhalten wir endlich

$$b_1 = \frac{P \cos s/a}{E \lambda^2 q},$$

$$\alpha = \frac{P \sin s/a}{E q},$$

$$a_1 = \frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2}.$$

Die letzte Gleichung verificirt sich von selbst, wenn man den berechneten Werth von B_1 benutzt und berücksichtigt, dass der Querschnitt symmetrisch ist.

Führen wir nun die gefundenen Werthe der Constanten in die Verschiebungen ein, so erhalten wir folgende Werthe derselben:

$$u = \frac{P}{E q} \left\{ -\mu \left(x \sin s/a + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \frac{a \sin s/a}{\lambda^2} \right) - \mu z \frac{(x^2 - y^2) \cos s/a}{2 \lambda^2} \right. \\ \left. - z^2 \frac{a \sin s/a}{2 \lambda^2} - z^3 \frac{\cos s/a}{6 \lambda^2} \right\} + b_3' z$$

$$v = -\frac{\mu y P}{E q} \left\{ \sin s/a + x \frac{a \sin s/a}{\lambda^2} - x z \frac{\cos s/a}{\lambda^2} \right\}$$

$$w = \frac{P}{E q} \left\{ x \frac{2\mu + 3}{4 \lambda^2} e^2 \cos s/a - (x^3 - 3 x y^2) \frac{\cos s/a}{4 \lambda^2} - x y^2 \frac{\cos s/a}{\lambda^2} \right. \\ \left. + z \sin s/a + x z \frac{a \sin s/a}{\lambda^2} + z^2 x \frac{\cos s/a}{2 \lambda^2} \right\} - b_3' x.$$

Die noch unbestimmt gebliebene Constante ergibt sich endlich durch Berücksichtigung der Bedingungen für den Anfangspunkt des Elementes, von denen alle erfüllt sind, ausser dass für $x = y = z = 0$ auch $\frac{dw}{dx} = 0$ sein soll. Diese Bedingung führt zu

$$b_3' = \frac{(2\mu + 3) e^2}{4 \lambda^2}.$$

Um nun die Gesamtverschiebung zu erhalten, müssen wir die Verschiebungen unter § 2 dazu nehmen, also kommen zu u und w noch $\frac{1}{2a}z^2$ und $-\frac{1}{a}xz$. Da nun x, y, z sehr kleine Grössen sind und x, y von derselben Ordnung wie e , so können wir die Grössen der dritten Dimension gegen die anderen vernachlässigen, nur bei v müssen wir eine Ausnahme machen; denn es kann der Natur der Sache nach v nicht von z unabhängig sein. Demnach gestalten sich nun die Werthe der Verschiebungen folgendermassen:

$$u = \frac{P}{E_q} \left\{ -\mu \left(x \sin s/a + \frac{1}{2} (x^2 - y^2) \frac{a \sin s/a}{\lambda^2} \right) + \frac{z^2 a \sin s/a}{2\lambda^2} + \frac{1}{2a} z^2, \right.$$

$$v = -\frac{\mu y P}{E_q} \left\{ \sin s/a + \frac{a \sin s/a}{\lambda^2} x - \frac{\cos s/a x z}{\lambda^2} \right\},$$

$$w = \left\{ \sin s/a z + \frac{a \sin s/a}{\lambda^2} x z \right\} \frac{P}{E_q} - \frac{1}{a} x z.$$

In diesen Ausdrücken bedeuten

$$-\mu \frac{P \sin s/a}{E_q} x, \quad -\mu \frac{P \sin s/a}{E_q} y, \quad \frac{P \sin s/a}{E_q} z$$

die Verschiebungen nach den drei Axen, von denen die beiden ersten Werthe eine nothwendige Folge des letzteren sind.

Mit Hülfe dieser Werthe von u, v und w können wir die Aenderung der Querschnitte beurtheilen. Irgend ein Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, hat nach der Biegung die Coordinaten ξ, η, ζ , so muss $\xi = x + u, \eta = y + v, \zeta = z + w$ sein. Betrachtet man nun irgend einen bestimmten Querschnitt, so ist z eine constante Grösse und man hat aus obigen Gleichungen nur x und y zu eliminiren und erhält dann die Gleichung des veränderten ebenen Querschnittes. Setzt man nun statt der vorzunehmenden Elimination in dem Werthe w die Coordinaten

ξ und η statt x und y , so begeht man, da u und v sehr kleine Grössen sind, einen Fehler höherer Ordnung. Thut man diess und nimmt die genauen Werthe von u und v , so erhält man die Gleichung einer krummen Fläche. Begeht man aber bei dieser Rechnung dieselben Vernachlässigungen wie oben, so erhält man

$$\xi = \left(1 + \frac{P \sin s/a}{E q}\right) z + \left(\frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} - \frac{1}{a}\right) z x,$$

also eine Ebene. Die oben gemachten Vernachlässigungen erhalten demnach noch eine andere Bedeutung; es enthalten nämlich dieselben die Bedingung, dass jeder ebene Querschnitt auch nach der Biegung noch eben bleiben soll.

Durch eine ähnliche Rechnung wie § 2 könnte man auch die krumme Linie berechnen, nach der jede Faser eines Elementes gebogen wird.

§ 4.

Es muss nun untersucht werden, welchen weiteren Bedingungen die Verschiebungen noch unterworfen sein müssen, damit die einzelnen Elemente ein zusammenhängendes Ganzes geben. In § 3 haben wir für jedes neue Element ein neues Coordinatensystem eingeführt, wir wollen nun alle diese einzelnen Systeme auf das Coordinatensystem des ersten Elementes beziehen. Seien ξ, η, ζ die Coordinaten des jedesmaligen Anfangspunktes des Elementen-Coordinatensystems, bezogen auf das feste System. Die Ordinate η muss 0 sein, da keine seitliche Biegung vorhanden sein soll. x, y, z seien die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das Elementen-Coordinatensystem, x', y', z' dessen Coordinaten in Bezug auf das feste System, dann hat man, wenn man bedenkt, dass unserer Annahme zu-

folge alle y -Axen parallel sind der festen y' -Axe, und man die Winkel der Axen gegeneinander mit $\hat{x}x'$, $\hat{z}x'$, $\hat{x}z'$, $\hat{z}z'$ bezeichnet,

$$x' = \xi + x \cos \hat{x}x' + z \cos \hat{z}x',$$

$$y' = y,$$

$$z' = \zeta + x \cos \hat{x}z' + z \cos \hat{z}z'.$$

Nach der Verschiebung geht x, y, z über in $x + u, y + v, z + w$, also sind dann die Coordinaten des verschobenen Punktes in Bezug auf das feste System

$$x' = \xi + (x + u) \cos \hat{x}x' + (z + w) \cos \hat{z}x',$$

$$y' = y + v,$$

$$z' = \zeta + (x + u) \cos \hat{x}z' + (z + w) \cos \hat{z}z'.$$

Betrachten wir nun den Stab als Ganzes, so müssen die ξ, η, ζ und auch $\cos \hat{x}x', \cos \hat{z}x', \cos \hat{x}z', \cos \hat{z}z'$ von einem Elemente zum anderen veränderlich und daher Funktionen von s sein. Wir können nun auf zwei verschiedene Arten von einem Punkte des Stabes zum nächstfolgenden kommen, einmal nämlich, indem wir in den Coordinaten eines Punktes z in $z + dz$ verwandeln, oder, indem wir den Punkt auf das feste System beziehen und also z unverändert lassen und von s zu $s + ds$ übergehen. Je nach diesen beiden Arten des Fortganges sind die Coordinaten des Punktes, welcher dem Punkt x', y', z' benachbart ist, entweder

$$x' + \frac{dx'}{dz}dz, y' + \frac{dy'}{dz}dz, z' + \frac{dz'}{dz}dz$$

oder

$$x' + \frac{dx'}{ds}ds, y' + \frac{dy'}{ds}ds, z' + \frac{dz'}{ds}ds.$$

Es ist ferner $dz = ds$ die Entfernung der betrachteten Punkte in der ursprünglichen Lage, mithin müssen, da beide Werthe dieselben sein müssen, folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{dx'}{dz} = \frac{dx'}{ds},$$

$$\frac{dy'}{dz} = \frac{dy'}{ds},$$

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{dz'}{ds}.$$

Die Ausführung der angegebenen Differentiation giebt

$$\begin{aligned} \cos \hat{x}x' \frac{du}{dz} + \cos \hat{z}x' \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) &= \frac{d\xi}{ds} + (x + u) \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} \\ &+ \cos \hat{x}x' \frac{du}{ds} + (z + w) \frac{d \cos \hat{z}x'}{ds} + \cos \hat{z}x' \frac{dw}{ds}, \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{ds},$$

$$\begin{aligned} \cos \hat{x}z' \frac{du}{dz} + \cos \hat{z}z' \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) &= \frac{d\zeta}{ds} + (x + u) \frac{d \cos \hat{x}z'}{ds} \\ &+ \cos \hat{x}z' \frac{du}{ds} + (z + w) \frac{d \cos \hat{z}z'}{ds} + \cos \hat{z}z' \frac{dw}{ds}. \end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass die Winkel $\hat{x}x'$ etc. nicht unabhängig von einander sind, sondern, dass $\hat{x}x' = \hat{z}z' = \hat{x}z' - 90 = 90 - \hat{z}x'$ und dass man setzen kann

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos \hat{z}x' (1 + \sigma) = \sin \hat{x}x' (1 + \sigma),$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \cos \hat{x}x' (1 + \sigma),$$

wo σ die Ausdehnung der Längeneinheit bedeutet, so verwandeln sich diese Bedingungen in folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos \hat{x}x' \frac{du}{dz} + \sin \hat{x}x' \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) &= \sin \hat{x}x' (1 + \sigma) \\ + (x + u) \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} + \cos \hat{x}x' \frac{du}{ds} &+ (z + w) \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} \\ + \sin \hat{x}x' \frac{dw}{ds}, \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{ds},$$

$$- \sin \hat{x}x' \frac{du}{dz} + \cos \hat{x}x' \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) = \cos \hat{x}x' (1 + \sigma)$$

$$- (x + u) \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} - \sin \hat{x}x' \frac{du}{ds} + (z + w) \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} + \cos \hat{x}x' \frac{dw}{ds}.$$

Werden nun die Gleichungen so transformirt, dass man $\frac{du}{dz}$ und $\frac{dw}{dz}$ getrennt erhält, indem man die erste mit $\cos \hat{x}x'$, die zweite mit $\sin \hat{x}x'$ multiplicirt und subtrahirt, dann die erste mit $\sin \hat{x}x'$, die zweite mit $\cos \hat{x}x'$ multiplicirt und addirt mit Rücksicht darauf, dass

$$\sin \hat{x}x' \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} + \cos \hat{x}x' \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} = 0$$

ist, so vereinfachen sich diese drei Gleichungen in folgende:

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{ds} + (z + w) \left(\cos \hat{x}x' \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} - \sin \hat{x}x' \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} \right),$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{ds},$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{ds} + (x + u) \left(\sin \hat{x}x' \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} - \cos \hat{x}x' \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} \right) + \sigma;$$

oder, wenn man zur Abkürzung setzt

$$\sin \hat{x}x' \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} + \cos \hat{x}x' \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} = A,$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{ds} - A (z + w),$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{ds},$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{ds} + A (x + u) + \sigma.$$

Von dem Werthe σ wissen wir schon, dass er $\frac{P \sin s/a}{Eq}$ ist. Setzen wir nun die in § 3 gefundenen Werthe ohne die Verschiebungen nach den Axen ein, da diese keinen Einfluss auf

die Möglichkeit des unzusammenhängenden Ganzen haben können, so verificirt sich die zweite Bedingung von selbst (dies giebt einen neuen Beleg dafür, dass in v das Glied mit z nicht vernachlässigt werden kann) und die anderen gehen über in

$$-\frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} z + \frac{1}{a} z = \frac{P \cos s/a}{E q \lambda^2} z^2 - A (z + w),$$

$$+ \frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} x - \frac{1}{a} x = \frac{P \sin s/a}{E q \lambda^2} x z + A (x + u).$$

In diesen Bedingungsgleichungen können wir wiederum die Glieder zweiter Dimension gegen die der ersten und auch u und w gegen x und z vernachlässigen. Wir erhalten dann durch Gleichsetzung der Coefficienten eine zu erfüllende Bedingung, nämlich:

$$-\frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} + \frac{1}{a} = -A.$$

§ 5.

Die Linie, in welche die Mittellinie in Folge der Biegung umgeformt wird, suchen wir zu bestimmen durch Gleichungen, bezogen auf das feste System $x'z'$. Es ist nämlich

$$\frac{dx'}{(1 + \sigma) ds} = \sin \hat{x}x', \quad \frac{dz'}{(1 + \sigma) ds} = \cos \hat{x}x',$$

mithin

$$x' = \int_0^s \sin \hat{x}x' (1 + \sigma) ds, \quad z' = \int_0^s \cos \hat{x}x' (1 + \sigma) ds.$$

Da der Winkel $\hat{x}x'$ nur wenig verschieden von s/a ist, so können wir, wenn δ und ε kleine Grössen bezeichnen, schreiben

$$\cos \hat{x}x' = \cos s/a + \delta,$$

$$\sin \hat{x}x' = \sin s/a + \varepsilon.$$

Diese Grössen δ und ε sind nicht unabhängig von einander, weil

$$\cos^2 \hat{x}x' + \sin^2 \hat{x}x' = 1.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe mit ε und δ ein, so erhält man, da die zweiten Potenzen von ε und δ vernachlässigt werden müssen,

$$\varepsilon \sin s/a + \delta \cos s/a = 0,$$

oder

$$\varepsilon = -\delta \cot s/a.$$

Diese Werthe von $\cos \hat{x}x'$ und $\sin \hat{x}x'$ müssen der wegen des Zusammenhanges der Elemente des Körpers zu erfüllenden Bedingung des vorigen § genügen. Werden die Werthe in diese Gleichung eingesetzt, so geht sie in die folgende über:

$$\begin{aligned} & (\cos s/a + \delta) \frac{d (\sin s/a - \delta \cos s/a)}{ds} \\ & - (\sin s/a - \delta \cos s/a) \frac{d (\cos s/a + \delta)}{ds} = - \frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} + \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Entwickelt man die hier angedeuteten Differentiationen und berücksichtigt, dass das Quadrat von δ gegen die anderen Grössen verschwindet, so bleibt

$$\frac{1}{\sin s/a} \cdot \frac{d\delta}{ds} - \frac{\delta \cos s/a}{a \sin^2 s/a} = \frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2}.$$

Dieser Gleichung kann man dadurch, dass man $\delta = p \sin s/a$ setzt, folgende einfache Form geben:

$$\frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} = \frac{dp}{ds};$$

woraus sich durch Integration p und damit ε und δ ergibt. Es ist nämlich

$$- \frac{a^2 P \cos s/a}{E q \lambda^2} + \text{Constante} = p.$$

Zur Bestimmung der darin enthaltenen Constanten wissen wir, dass für $s = 0$, d. h. am Anfangspunkte $\hat{x}x' = s/a = 0$, also sowohl ε als $\delta = 0$ und damit auch $p = 0$ sein muss.

Daraus findet man $\text{Constante} = \frac{a^2 P}{E q \lambda^2}$, mithin

$$p = \frac{a^2 P}{E q \lambda^2} - \frac{a^2 P \cos s/a}{E q \lambda^2}.$$

Mit Hülfe dieses Werthes von p gehen die obigen Integrale, welche die Biegungslinie bestimmen, über in folgende:

$$x' = \int_0^s (\sin s/a - p \cos s/a) (1 + \sigma) ds,$$

$$z' = \int_0^s (\cos s/a + p \sin s/a) (1 + \sigma) ds.$$

Führt man darin die Multiplication aus und berücksichtigt, dass $p\sigma \cos s/a$ als klein der zweiten Ordnung vernachlässigt werden kann, so kommt

$$x' = \int_0^s (\sin s/a + \sigma \sin s/a - p \cos s/a) ds,$$

$$z' = \int_0^s (\cos s/a + \sigma \cos s/a + p \sin s/a) ds.$$

Durch Einführung des Werthes p und σ erhalten wir endlich

$$x' = \int_0^s \left[\sin s/a + \frac{P \sin^2 s/a}{E q} - \frac{a^2 P \cos s/a}{E q \lambda^2} + \frac{a^2 P \cos^2 s/a}{E q \lambda^2} \right] ds,$$

$$z' = \int_0^s \left[\cos s/a + \frac{P \sin s/a \cdot \cos s/a}{E q} + \frac{a^2 P \sin s/a}{E q \lambda^2} - \frac{a^2 P \cos s/a \cdot \sin s/a}{E q \lambda^2} \right] ds.$$

Die hierin vorkommenden Integrale sind alle leicht ausführbar und geben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 x' &= a - a \cos s/a - \frac{aP}{2E_q} (\sin s/a \cdot \cos s/a - s/a) \\
 &\quad - \frac{a^3 P}{E_q \lambda^2} \sin s/a + \frac{a^3 P}{4E_q \lambda^2} (\sin s/a \cdot \cos s/a + s/a), \\
 z' &= a \sin s/a - \frac{aP}{4E_q} (\cos 2s/a - 1) - \frac{a^3 P}{E_q \lambda^2} (\cos s/a - 1) \\
 &\quad + \frac{a^3 P}{4E_q \lambda^2} (\cos 2s/a - 1).
 \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen kann man eine andere Form geben, so dass man die Abweichung vom Kreise deutlicher erkennt:

$$\begin{aligned}
 \frac{2E_q}{aP} (x' - a + a \cos s/a) &= \left(\frac{a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \sin s/a \cdot \cos s/a \\
 &\quad + \left(\frac{a^2}{\lambda^2} + 1 \right) s/a - \frac{2a^2}{\lambda^2} \sin s/a, \\
 \frac{2E_q}{aP} (z' - a \sin s/a) &= \left(\frac{a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \cos^2 s/a - \frac{2a^2}{\lambda^2} \cos s/a + \frac{a^2}{\lambda^2} + 1.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass alle Punkte des halbkreisförmig gebogenen Körpers von der x' -Axe entfernt werden; denn $z' - a \sin s/a$ hat immer einen positiven Werth, wie man leicht sieht, wenn man dem Ausdrucke folgende Form giebt:

$$\frac{a^2}{\lambda^2} (1 - \cos s/a)^2 + (1 - \cos^2 s/a).$$

Die Entfernungen werden auch immer grösser, je weiter man sich vom Befestigungspunkte entfernt. Dies sieht man aus obigem Werthe für den zweiten Quadranten sehr leicht, da dort der $\cos$ negativ wird und absolut genommen immer mehr zunimmt. Um dasselbe für den ersten Quadranten zu finden, braucht man nur den oben angegebenen Ausdruck zu berücksichtigen. Der

Endpunkt erfährt demnach die grösste Abweichung, und zwar ist dieselbe $\frac{2 a^3 P}{E q \lambda^2}$.

Nicht so einfach ist die Beurtheilung der Verschiebung der einzelnen Punkte in Bezug auf die z' -Axe; denn es giebt hier ausser dem Anfangspunkte noch einen Punkt, der seine Entfernung von der z' -Axe nicht ändert und die Punkte, welche zu verschiedenen Seiten desselben liegen, erhalten eine entgegengesetzte Verschiebung. Dies sieht man am besten, wenn man statt der allgemeinen Grössen ein bestimmtes Beispiel giebt und die einzelnen Verschiebungen berechnet. Man setze den Halbmesser des Querschnittes $e = 1$ und den Halbmesser des Kreises, nach dem der Körper gebogen ist, $a = 10$, also $\lambda^2 = \frac{1}{4}$. Die Verschiebungen der Punkte, deren ursprüngliche Abscissen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 sind, werden dann

$$\frac{(z' - a \sin s/a) 2 E q}{a P} = 16,36; 65,88; 142,29; 256,80; 401; \\ 576,80; 782,29; 1023,4; 1296,36; 1600.$$

$$\frac{(x' - a + a \cos s/a) 2 E q}{a P} = -32,51; -76,85; -124,29; \\ -156,54; -170,1; -152,95; -78,89; \\ 57,62; 330,98; 1259.$$

§ 6.

Es bleibt nun das für die Praxis am meisten zu Berücksichtigende zu untersuchen, nämlich die Festigkeit eines so gebogenen Körpers, der als Haken dienen kann, um daran mittelst Ringen oder anderswie die wirkende Kraft anzubringen. Um darüber zu entscheiden, müssen wir vor Allem den Punkt des

Körpers aufsuchen, welcher am meisten gefährdet ist; denn ist der Körper so eingerichtet, dass an diesem kein Bruch stattfinden kann, so ist die möglichste Sicherheit geboten. Es ist hier zweierlei zu bedenken; da nämlich einmal der Körper in Folge der Ausdehnung zerreißen, das andere Mal durch die Biegung zerbrechen kann.

Die Ausdehnung der Längeneinheit ist $\sigma = \frac{P \sin s/a}{E q}$, so dass also ds übergeht in $ds + \frac{P \sin s/a}{E q} \cdot ds$.

Hieraus ergibt sich die Gesamtausdehnung

$$\Delta l = \int_0^{a\pi} \frac{P \sin s/a}{E q} ds = \frac{2 a P}{E q},$$

also die Ausdehnung, welche ein gerader, cylindrischer Körper von demselben Querschnitte durch P erleiden würde, wenn seine Länge gleich dem Durchmesser des Biegungskreises wäre.

Die grösste Ausdehnung der Längeneinheit findet statt bei $s = \frac{1}{2} \pi a$ und zwar ist sie da $\frac{P}{E q}$.

Die Spannung S , welche eine solche Ausdehnung hervorbringt, wird berechnet aus folgender Proportion, die die Erklärung des Elasticitäts-Coefficienten liefert

$$1 : \frac{P}{E q} = E : S, \text{ also } S = \frac{P}{q}.$$

Der Punkt, an welchem der Körper zerbrochen wird, ist da, wo die Krümmung am stärksten ist. Daraus geht hervor, dass wir, um den Bruchpunkt zu finden, den Krümmungshalbmesser der Biegungcurve, die hervorgebracht wird ohne Ausdehnung, finden müssen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nach der Art, wie die Kraft wirkt, der kreisförmig gebogene Körper nicht stärker gekrümmt wird, sondern im Gegentheil die gegebene Kreiskrümmung vermindert wird. Der Bruch kann nun

nicht durch die kreisförmige Krümmung, sondern durch die Aenderung derselben stattfinden, er wird also da stattfinden, wo der gebogene Körper nach der Biegung die geringste Krümmung hat. Bezeichnen wir mit ϱ den Krümmungshalbmesser der Biegungcurve, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{\frac{d^2 z'}{dx'^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$= - \frac{\frac{dx'}{ds} \cdot \frac{d^2 z'}{ds^2} - \frac{dz'}{ds} \cdot \frac{d^2 x'}{ds^2}}{\left[\left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{ds}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Ohne Berücksichtigung der Ausdehnung ist aber nach § 5

$$\frac{dx'}{ds} = \sin \hat{x}x', \quad \frac{dz'}{ds} = \cos \hat{x}x',$$

mithin

$$\frac{1}{\varrho} = - \sin \hat{x}x' \frac{d \cos \hat{x}x'}{ds} + \cos \hat{x}x' \frac{d \sin \hat{x}x'}{ds} = -A \text{ (§ 4),}$$

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2} + \frac{1}{a}.$$

Daraus geht hervor, dass die Krümmung am geringsten ist, wenn $\sin s/a = 1$, d. h. $s = \frac{1}{2} a \pi$ ist, dann ist

$$\frac{1}{\varrho_1} = - \frac{a P}{E q \lambda^2} + \frac{1}{a}.$$

Der Werth $\frac{1}{\varrho}$ ist wirklich der oben angedeutete; es sind darin zwei verschiedene Krümmungen enthalten, nämlich die Kreiskrümmung und die durch P hervorgebrachte; setzt man $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{r}$, so erhält man dieselben getrennt und also dann für die durch P hervorgebrachte r den Werth $\frac{1}{r} = \frac{a P \sin s/a}{E q \lambda^2}$, wo also r den Krümmungshalbmesser in Bezug auf den Kreis bedeutet. Es findet die stärkste Biegung da statt, wo die

Biegung in Bezug auf den anfänglichen Kreis am grössten ist. Dieser kleinste Krümmungshalbmesser r_1 ist demnach $= \frac{Eq\lambda^2}{aP}$.

Bedeutet nun $\pm \lambda$ die Ausdehnung oder Zusammenziehung der von der Mittellinie am weitesten entfernten Faser-einheit, je nachdem diese Faser innen oder aussen ist, so ist $\pm \lambda$ gegeben durch folgende Proportion:

$$\pm \lambda : 1 = e : r,$$

mithin

$$\text{max. } \pm \lambda = \frac{e}{r_1} = \frac{aeP}{Eq\lambda^2} = \frac{4aP}{Eqe}.$$

Daraus können wir wie oben die Spannung S' berechnen, die nun ein Zug auf der Innenseite und Druck auf der Aussen-seite ist

$$S' = \pm \frac{4aP}{qe},$$

wenn wir, was bei der geringen Biegung erlaubt ist, die Elasticitätscoefficienten des Materiales in Bezug auf absolute und rückwirkende Festigkeit einander gleich setzen.

Die Gesamtspannung ist demnach

$$S + S' = \frac{P}{q} \left(1 \pm \frac{4a}{e} \right).$$

Dies giebt nun entweder einen positiven oder einen negativen Werth und zwar letzteren immer bei dem negativen Zeichen; denn es muss der Annahme nach $\frac{4a}{e} > 1$ sein. Es kommt uns aber hier nur auf den absoluten Werth der Spannung an und nicht auf die Art derselben, wir müssen demnach setzen

$$S + S' = \frac{P}{q} \left(\pm 1 + \frac{4a}{e} \right).$$

Daraus geht sehr leicht hervor, dass die grösste Spannung an der Innenseite ist und dass nur das $+$ Zeichen berücksichtigt werden muss.

Bedeutet nun T das Tangvermögen der Substanz des gebogenen Körpers, d. h. diejenige Kraft, welche den Körper mit der Querschnittseinheit soweit biegt, dass die am meisten ausgedehnte Faser ihre Elasticitätsgrenze erreicht, und deren Ueberschreiten eine bleibende Aenderung des Körpers, sei es einen Bruch oder eine Umgestaltung bewirkt, so muss sein

$$T > \frac{P}{q} \left(1 + \frac{4a}{e} \right).$$

Auf dieselbe Art können wir das Maximum der Spannung für jeden Querschnitt berechnen und finden deren Werth

$$\frac{P \sin s/a}{q} \left(1 + \frac{4a}{e} \right).$$

Hieraus erkennt man, dass diese Spannung an verschiedenen Querschnitten verschieden ist, dass sie zu beiden Seiten von der Mitte aus abnimmt und zwar auf beiden Seiten auf dieselbe Art. Daraus geht hervor, dass, wollte man die Querschnittshalbmesser alle gleich sein lassen, die Querschnitte nicht gleichen Widerstand zu leisten hätten. Es soll im Folgenden berechnet werden die Grösse der einzelnen Querschnittshalbmesser, η , wenn jeder Querschnitt einen gleichen Widerstand gegen das Abbrechen leistet.

Um diese Rechnung bequem ausführen zu können, vergleichen wir die zu bestimmenden Dimensionen mit einer gewissen einfachen bestimmbaren Grunddimension. Schon oben ist angegeben, dass ein Körper, welcher unserer Aufgabe entspricht, als Haken dienen kann. Es kann nun ein Haken nicht selbständig auftreten, sondern immer wird er sich vorfinden als das Ende eines geraden Cylinders. Sei nun dieser Haken so angebracht, dass die Kraft P nur die absolute Festigkeit des geraden Endes beansprucht und werden die Querschnittshalbmesser so bestimmt, dass alle nicht mehr angegriffen werden, als die Querschnitte des geraden Fortsatzes. Setzen

wir den Halbmesser des geraden Körpers $= R$, so ist die Spannung in Folge der Kraft P auf die Querschnittseinheit $\frac{P}{\pi R^2}$. Die von η zu erfüllende Gleichung ist nun

$$\frac{P \sin s/a}{q} \left(1 + \frac{a \eta}{\lambda^2} \right) = \frac{P}{\pi R^2}$$

$$\sin s/a = \frac{1}{R^2 \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{4a}{\eta^3} \right)}$$

oder

$$\eta^3 - R^2 \sin s/a \eta - 4a R^2 \sin s/a = 0.$$

Setzen wir ferner $a = nR$ und z. B. zur numerischen Berechnung $R = 1$, $n = 10$, was der obigen Beschränkung § 3 nicht widerspricht, so muss sein

$$\sin s/a = \frac{\eta^3}{\eta + 40} \text{ oder } \eta^3 - \sin s/a \eta - 40 \sin s/a = 0.*)$$

Aus diesen Formeln geht zunächst hervor, dass an beiden Enden, also für $s = 0$ und $s = \pi a$, $\eta = 0$ ist. Beide Werthe erhalten in der Praxis eine nothwendige Abweichung; denn an dem einen Ende wird der Haken so umgeändert, dass derselbe allmählig in den geraden Cylinder übergeht, und das andere Ende kann nicht in eine Spitze ausgehen, wegen der noch anzubringenden Verlängerung, die dazu dient, das Abfahren des an dem Haken hängenden Gewichtes zu verhindern. Die numerische Rechnung dieses Beispieles liefert folgende Werthe:

*) Hierher passt die Bemerkung, welche Grashof, „Angewandte Mechanik“, § 28, als Einleitung zur Berechnung des Beispieles eines nicht prismatischen Körpers in Bezug auf zusammengesetzte Festigkeit gemacht hat: „Wenn freilich auch zugegeben werden muss, dass die Rechnung nicht einfach genug ist, um sich für die praktische Anwendung empfehlen zu lassen, so mag sie als Beispiel solcher nicht seltenen Fälle dienen, in denen es angemessener erscheint, sich lediglich auf die in eine empirische Formel einzukleidende praktische Erfahrung zu stützen, als auf eine mangelhafte Theorie.“

Die Halbmesser des Querschnittes.	Der Centriwinkel des Bogens vom Anfange an gerechnet, bei dem dieser Halbmesser sein muss.
0	0°, 180°,
1	1° 33', 178° 27',
2	10° 58', 169° 2',
3	34° 13', 145° 47',
3, 5	80° 16', 99° 44',
3, 51	90°.

Sucht man nun umgekehrt mit gegebenem Winkel die η zu berechnen und wendet die in § 7 erwähnte Näherungsmethode an, so erhält man zur Berechnung der Querschnittshalbmesser die Formel

$$\eta = 3,14143 \sqrt[3]{\sin s/a}.$$

Aus dem Ausdrücke für die Spannung $\frac{P \sin s/a}{q} \left(\pm 1 + \frac{4a}{\eta} \right)$ erkennt man, dass die berechnete Körperform keineswegs einen Körper von gleichem Widerstande im strengsten Sinne des Wortes giebt; denn es würde, wollte man das Maximum der Spannung auf der Aussenseite nur erreichen, zur Berechnung der Halbmesser mit Beibehaltung der eingeführten Zahlenwerthe folgende Gleichung dienen:

$$\eta^3 + \sin s/a \eta - 40 \sin s/a = 0.$$

Die hieraus berechneten Werthe von η sind kleiner als die oben angegebenen, also unbrauchbar, denn mit denselben würde die Tragfähigkeit der inneren Fasern überschritten. Daraus geht hervor, dass sich ein Haken mit kreisförmigem Querschnitte, dessen Mittellinie ein Kreis ist, nicht so construiren lässt, dass alle Fasern gleichstark angegriffen werden. Diese Bemerkung gilt auch von der Berechnung der anderen Körperformen in den folgenden Paragraphen.

§ 7.

Die Untersuchung der zweiten gestellten Aufgabe wird sich um Vieles vereinfachen, da das Meiste der vorhergehenden Resultate mit geringer Veränderung sich hier wiederholt. Die Biegungslinie, welche der Aufgabe gemäss eine ebene sein muss, werde auf ein Coordinatensystem $x'z'$, dessen Lage gegen den Körper dieselbe ist, wie sie es war bei der vorigen Untersuchung, bezogen. Die Betrachtungen der ersten Paragraphen erleiden gar keine Aenderung, nur erhält man andere Componenten und zwar muss man überall statt $P \sin s/a$ setzen $P \cos s/a$ und umgekehrt. Die Gleichungen, welche die Biegungslinie bestimmen, werden demnach folgende:

$$x' = \int_0^s \sin \hat{x}x' (1 + \sigma) ds, \quad z' = \int_0^s \cos \hat{x}x' (1 + \sigma) ds,$$

wo

$$\cos \hat{x}x' = \cos s/a + \delta, \quad \sin \hat{x}x' = \sin s/a + \epsilon.$$

Die Bestimmung der Werthe ϵ und δ führt zu der Differentialgleichung

$$\frac{a P \cos s/a}{E q \lambda^2} = \frac{dp}{ds},$$

woraus folgt

$$\frac{a^2 P \sin s/a}{E q \lambda^2} = p.$$

Eine Constante kann nicht dazukommen, weil für $s = 0$ auch $p = 0$ sein muss. In die Gleichungen für x' und z' werden nun diese Werthe von $\sin \hat{x}x'$ und $\cos \hat{x}x'$ eingesetzt:

$$x' = \int_0^s (\sin s/a + \sigma \sin s/a - p \cos s/a) ds,$$

$$z' = \int_0^s (\cos s/a + \sigma \cos s/a + p \sin s/a) ds,$$

oder wenn man berücksichtigt, dass $\sigma = \frac{P \cos s/a}{E q}$ ist und den oben berechneten Werth von p einführt

$$x' = \int_0^s \left(\sin s/a + \frac{P \cos s/a \sin s/a}{E q} - \frac{P a^2 \cos s/a \sin s/a}{E q \lambda^2} \right) ds,$$

$$z' = \int_0^s \left(\cos s/a + \frac{P \cos^2 s/a}{E q} + \frac{P a^2 \sin^2 s/a}{E q \lambda^2} \right) ds.$$

Die Ausführung der Integration giebt

$$x' = a - a \cos s/a - \frac{a P}{4 E q} \left(1 - \frac{a^2}{\lambda^2} \right) \left(\cos \frac{2s}{a} - 1 \right),$$

$$z' = a \sin s/a + \frac{a P}{2 E q} (\sin s/a \cos s/a + s/a) - \frac{P a^3}{2 E q \lambda^2} (\sin s/a \cos s/a - s/a).$$

Diesen Gleichungen kann man folgende Form geben, um die Abweichung von der ursprünglichen Kreisform leichter beurtheilen zu können:

$$\frac{2 E q}{a P} (x' - a + a \cos s/a) = - \left(\frac{a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \sin^2 s/a,$$

$$\frac{2 E q}{a P} (z' - a \sin s/a) = - \left(\frac{a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \sin s/a \cos s/a + \left(\frac{a^2}{\lambda^2} + 1 \right) s/a.$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, dass jeder Punkt nach der z' -Axe zu geschoben wird und zwar ist diese Verschiebung um so grösser, je weiter man sich dem freien Ende des Körpers, wo $s/a = \frac{1}{2}\pi$ ist, nähert. Die grösste Abweichung ist

$$\left(\frac{a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \frac{a P}{2 E q}.$$

Dann wird jeder Punkt von der x' -Axe weiter entfernt und zwar beträgt diese Verschiebung auch umsomehr, je näher man dem freien Ende kommt, wo sie $\left(\frac{a^2}{\lambda^2} + 1 \right) \frac{a P}{4 E q} \pi$ ist; dass diess wirklich stattfindet, ergibt sich wie folgt. Differenzirt man die rechte Seite der zweiten Gleichung, so erhält man

$$\frac{2}{a} \left[\left(\frac{a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \sin^2 s/a + 1 \right],$$

also einen für jedes s positiven Werth.

Die Untersuchung der Festigkeit des Körpers gegen das Zerbrechen ist analog den Rechnungen des vorhergehenden §. Die Gesamtausdehnung wird berechnet aus σ :

$$\Delta l = \int_0^{\frac{1}{2}\pi a} \frac{P \cos s/a}{E q} ds = \frac{aP}{Eq},$$

also, wie voraus zu sehen, gleich der Hälfte der Ausdehnung bei der vorigen Aufgabe.

Die grösste Ausdehnung findet beim Befestigungspunkte statt und zwar ist sie $= \frac{P}{Eq}$ und mithin die grösste Spannung $\frac{P}{q}$.

Die Auffindung des Punktes, welcher am meisten gefährdet ist, geschieht wie oben. Es ist nämlich mit Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnungen

$$\frac{1}{\varrho} = - \frac{a P \cos s/a}{Eq \lambda^2} + \frac{1}{a} = - \frac{1}{r} + \frac{1}{a}.$$

Das Maximum der von der Kreislinie abbiegenden Krümmung findet also statt bei $s = 0$, wo ist

$$\frac{1}{r_1} = \frac{a P}{Eq \lambda^2},$$

mithin ist die grösste Spannung $\pm \frac{4 a P}{q e}$.

Diese Resultate stimmen demnach vollständig mit den obigen überein, was in der Natur der Sache liegt; denn man denke nur die Mitte des halbkreisförmig gekrümmten Körpers fest, so ist die erste Aufgabe dieselbe wie die zweite, nur zu beiden Seiten wiederholt.

Die Spannung der äussersten Fasern jedes Querschnittes, wenn die Halbmesser η genannt werden, ist

$$\frac{P \cos s/a}{q} \left(\pm 1 + \frac{4a}{\eta} \right),$$

mithin die grösste Spannung

$$\frac{P \cos s/a}{q} \left(1 + \frac{4a}{\eta} \right).$$

Die Dimensionen der einzelnen Querschnitte werden sich hier auch bestimmen nach der Art und Weise, wie man einen so geformten Haken an einem geraden Cylinder anbringt. Ein solcher Haken wird nämlich die Fortsetzung eines geraden Cylinders bilden, so dass die Dimensionen desselben dieselben sind wie die des Hakens an dem am meisten gefährdeten Punkte. Bezeichnen wir den Halbmesser dieses Querschnitts mit e , so wird an diesem Cylinder die Kraft P wirken, wie eine Kraft, die excentrisch an einem geraden Cylinder in der Richtung der Axe desselben wirkt. Die veränderlichen Querschnittshalbmesser werden dann berechnet nach folgender Formel

$$P \cos s/a \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{4a}{\eta^3} \right) = P \left(\frac{1}{e^2} + \frac{4a}{e^3} \right).$$

Setzt man nun $e = 1$ und wie oben $a = n e = 10$, so erhält man

$$\cos s/a = \frac{41 \eta^3}{\eta + 40} \text{ oder } \eta^3 - \frac{1}{41} \cos s/a \cdot \eta - \frac{40}{41} \cos s/a = 0.$$

Für $s/a = \frac{1}{2} \pi a$ also am Endpunkte ist $\eta = 0$. Dieser Werth ist aus denselben Gründen, aus denen oben eine Veränderung anzubringen war, in der Praxis unzulässig. Die numerische Rechnung liefert folgende Resultate:

Halbmesser des Querschnittes.	Der zugehörige Centriwinkel.
0,1	89° 59' 20'',
0,2	89° 57',
0,4	86° 16',
0,6	80° 1',
0,7	69° 47',
0,8	59° 2',
0,9	43° 3',
0,95	33° 4',
1	0°.

Wendet man das abgekürzte Verfahren von Wiebe an, so erhält man

$$\eta = 0,976 \sqrt[3]{\cos s/a}.$$

Ist der Haken so angebracht, dass die Richtung der Kraft senkrecht zur Fortsetzung des Hakens ist, so dass also nur die relative Festigkeit des Fortsatzes in Anspruch genommen wird, so erhalten wir zur Berechnung der Querschnittshalbmesser folgende Gleichung

$$P \cos s/a \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{4a}{\eta^3} \right) = P \frac{4a}{e^3},$$

oder mit Benutzung der oben angeführten Zahlen

$$\cos s/a = \frac{40\eta^3}{\eta + 40} \text{ oder } \eta^3 - \frac{1}{40} \cos s/a \cdot \eta - \cos s/a = 0.$$

Halbmesser des Querschnittes.	Der zugehörige Centriwinkel.
0,1	89° 59' 20'',
0,2	89° 33',
0,4	86° 22',
0,6	77° 42',
0,8	59° 52',
0,9	44° 31',
1	12° 14',
1,001	11° 54',
1,005	8° 2',
1,008	2° 33',
1,009	existirt nicht.

Abgekürzt erhält man hieraus

$$\eta = \sqrt[3]{\cos s/a}.$$

§ 8.

Die Behandlung der dritten Aufgabe, wo also ein voller Kreis gegeben ist, führen wir auf die ersteren zurück, indem wir statt des einen Halbkreises, der den andern zwingt, eine andere Lage anzunehmen, als wenn das eine Ende frei wäre und zwar so, dass die Biegungscurve für beide Quadranten dieselbe ist, eine Kraft am Ende des Halbkreises einführen, deren Werth dann durch die eben angegebene Bedingung berechnet werden muss. Bezeichnen wir die unbekannte Kraft mit Q , so erhalten wir statt der oben gewonnenen Resultate folgende:

$$\sigma = \frac{P \sin s/a - Q}{E q},$$

$$\frac{a}{E_q \lambda^2} (P \sin s/a - Q) = \frac{dp}{ds},$$

$$-\frac{a^2 P \cos s/a}{E_q \lambda^2} - \frac{a Q s}{E_q \lambda^2} + \frac{a^2 P}{E_q \lambda^2} = p.$$

Die Gleichungen, welche die Biegungscurve bestimmen, sind dann, wenn mit (x') und (z') die Werthe dieser Coordinaten in § 5 bezeichnet werden:

$$x' = (x') + \frac{aQ}{E_q} \cos s/a + \frac{a^3 Q}{E_q \lambda^2} (\cos s/a + s/a \sin s/a),$$

$$z' = (z') - \frac{aQ}{E_q} \sin s/a - \frac{a^3 Q}{E_q \lambda^2} (\sin s/a - s/a \cos s/a).$$

Zur Bestimmung von Q erhalten wir nun eine Gleichung, wenn wir nach der oben gegebenen Bedingung in z' statt s/a einführen $\pi - s/a$ und dann diese beiden Werthe von z' einander gleich setzen. Die sich hierdurch ergebende Gleichung ist

$$\frac{2a^3 P}{E_q \lambda^2} \cos s/a - \frac{a^3 Q}{E_q \lambda^2} \pi \cos s/a = 0,$$

woraus folgt

$$Q = \frac{2P}{\pi}.$$

Man überzeugt sich leicht durch Rechnung, dass mit Benutzung dieses Werthes von Q das erfüllt ist, was erreicht werden soll; denn es darf dann nicht bloß die Verschiebung nach der z' -Axe in beiden Quadranten dieselbe sein, sondern auch die in Bezug auf die x' -Axe. Dass das letztere auch erfüllt ist, findet man wie folgt. Man berechnet x' für den Werth $s/a = \frac{1}{2}\pi$. Setzt man den sich hierdurch ergebenden Werth $= \alpha$ und bezieht die Curve auf ein Coordinatensystem, dessen x gleich sind $x' - \alpha$, so ändern sich die Abscissen ihrem absoluten Werthe nach nicht, wenn man statt s/a setzt $\pi - s/a$, die Werthe haben aber entgegengesetzte Zeichen. Dasselbe Resultat findet man auch, wenn man die trigono-

metrische Tangente der Winkel berechnet, welche die Tangenten an die Curve mit der x' -Axe bilden. Aus der Natur der Aufgabe geht hervor, dass alle Punkte der x' -Axe näher gerückt werden und die Abscisse jedes Punktes vergrößert wird. Die Rechnung nach dem Beispiele von § 5 giebt dann für den ersten Quadranten:

$$\frac{(y' - a \sin s/a) 2Eq}{aP} = -28,86; -59,37; -91,27; \\ -104,03; -109,56;$$

$$\frac{(x' - a + a \cos s/a) 2Eq}{aP} = -570,75; 606,56; 622,08; \\ 628,71; 629,9.$$

Die Gesamtausdehnung der einen Hälfte des Ringes ist demnach

$$\Delta l = \frac{1}{Eq} \int_0^{-\pi/a} \left(P \sin s/a - \frac{2P}{\pi} \right) ds = 0.$$

Dieser Werth erklärt sich daraus, dass theils Ausdehnung, theils Zusammendrückung stattfindet und zwar so, dass sich diess in Bezug auf die ganze Länge aufhebt. Das Maximum der Ausdehnung findet statt in der Mitte und das der Zusammendrückung an den beiden Enden. Weder Ausdehnung noch Zusammendrückung findet statt bei

$$\sin s/a = 2/\pi \text{ d. h. } \angle s/a = 39^\circ 32'.$$

Die Spannung, welche aus der Längsänderung folgt, ist demnach

$$\frac{P}{q} \left(\sin s/a - \frac{2}{\pi} \right).$$

Für den Bruchpunkt finden wir, wenn wir die oben eingeführten Bezeichnungen beibehalten:

$$\frac{1}{r} = \frac{a \left(P \sin s/a - \frac{2P}{\pi} \right)}{Eq \lambda^2}.$$

Die grösste vom Kreise abbiegende Krümmung findet demnach statt bei $s = \frac{1}{2} \pi a$.

Bezeichnen wir mit e den Halbmesser des Querschnittes an diesem Punkte, so ist die grösste Spannung davon

$$\pm \frac{e a P (\pi - 2)}{\pi q \lambda^2} = \pm \frac{4 a P (1 - 2/\pi)}{q e},$$

mithin ist die Spannung in diesem Punkte, welche hervor-
gebracht wird durch Biegung und Ausdehnung, dem absoluten
Werthe nach,

$$\frac{P}{q} (1 - 2/\pi) \left(\pm 1 + \frac{4a}{q e} \right).$$

Die ganze Spannung an der äussersten Faser eines jeden beliebigen Querschnittes ist, wenn η den Halbmesser des Querschnittes bezeichnet:

$$\frac{P}{q} (\sin s/a - 2/\pi) \left(1 \pm \frac{a \eta}{\lambda^2} \right) \text{ oder } \frac{P}{q} (\sin s/a - 2/\pi) \left(1 \pm \frac{4a}{\eta} \right),$$

wo sich das $+$ Zeichen auf die Innen- und das $-$ Zeichen auf die Aussenseite bezieht. Da nun $1 \pm \frac{4a}{\eta} \geq 0$ ist, so muss Innen ein Zug sein, wenn $\sin s/a > 2/\pi$, ein Druck, wenn $\sin s/a < 2/\pi$ ist und umgekehrt auf der Aussenseite.

Wollen wir einen Körper von gleichem Widerstande finden, so haben wir dazu vier Gleichungen, da nämlich $1 \pm \frac{a \eta}{\lambda^2}$ oder $1 \pm \frac{4a}{\eta} \leq 0$ ist.

Es muss nämlich sein

auf der Innenseite:

$$1) \left(\frac{P}{q} (\sin s/a - 2/\pi) \right) \left(1 + \frac{4a}{\eta} \right) = C,$$

wenn s/a liegt zwischen $\arcsin 2/\pi$ und $\pi - \arcsin 2/\pi$;

$$2) \frac{P}{q} (2/\pi - \sin s/a) \left(1 + \frac{4a}{\eta} \right) = C,$$

wenn s/a liegt zwischen 0 und $\arcsin 2/\pi$ und zwischen $\pi - \arcsin 2/\pi$ und π .

Auf der Aussenseite:

$$3) \frac{P}{q} (\sin s/a - 2/\pi) \left(1 - \frac{4a}{\eta}\right) = C,$$

wenn s/a liegt zwischen 0 und $\arcsin 2/\pi$ und zwischen $\pi - \arcsin 2/\pi$ und π ;

$$4) \frac{P}{q} (2/\pi - \sin s/a) \left(1 - \frac{4a}{\eta}\right) = C,$$

wenn s/a liegt zwischen $\arcsin 2/\pi$ und $\pi - \arcsin 2/\pi$.

Zur Berechnung der verschiedenen η ist nun weiter zu untersuchen, wo bei 1), 4) und bei 2), 3) die grösste Spannung ist, ob auf der Innen- oder Aussenseite. Bei 1) und 4) sieht man leicht, dass die Innenseite mehr gezogen wird als die Aussenseite gedrückt; denn wenn wir diesen Unterschied der Spannung nicht berücksichtigen, sondern nur die absoluten Werthe vergleichen, so sehen die zu vergleichenden Ausdrücke wie folgt aus:

$$\frac{P}{q} (\sin s/a - 2/\pi) \left(\frac{4a}{\eta} \pm 1\right),$$

woraus das Behauptete sogleich folgt.

Setzen wir ebenso die Ausdrücke unter 2) und 3) zusammen, so erhalten wir

$$\frac{P}{q} (2/\pi - \sin s/a) \left(\frac{4a}{\eta} \pm 1\right),$$

woraus wiederum klar ist, dass die Maximalspannung an der Innenseite ist.

Zur Berechnung der η bleiben mithin nur die Gleichungen

$$\frac{P}{q} (\sin s/a - 2/\pi) \left(\frac{4a}{\eta} + 1\right) = C$$

und

$$\frac{P}{q} (2/\pi - \sin s/a) \left(\frac{4a}{\eta} + 1\right) = C.$$

Zur Bestimmung der Constanten C nehmen wir denselben Vergleich wie § 6, da solche Ringe wieder an Haken angebracht werden und so die Kraft endlich an den geraden Cylinder übertragen. Es ist demnach überall statt C zu setzen $\frac{P}{\pi R^2}$.

Dadurch ergeben sich folgende Gleichungen, wenn wie oben gesetzt wird $a = nR$, $n = 10$, $R = 1$:

$$\text{oder} \quad 1) \sin s/a = 2/\pi + \frac{\eta^3}{\eta + 40}$$

$$\eta^3 + (2/\pi - \sin s/a) \eta + (2/\pi - \sin s/a) 40 = 0;$$

$$\text{oder} \quad 2) \sin s/a = 2/\pi - \frac{\eta^3}{\eta + 40}$$

$$\eta^3 - (2/\pi - \sin s/a) \eta - (2/\pi - \sin s/a) 40 = 0.$$

Um weiter über die Brauchbarkeit der aufgestellten Formeln zu entscheiden, ist es noch nöthig, zu untersuchen, ob die gefundenen Halbmesser bei den Uebergängen einen Sprung erleiden. Man setze $\arcsin 2/\pi = \varphi$, so haben wir benachbarte η an den Grenzen, wenn wir statt φ setzen $\varphi + \delta$ und $\varphi - \delta$, die dann für abnehmende δ immer weniger von einander verschieden werden. Die beiden Ausdrücke geben dann

$$\eta^3 - R^2 (\sin (\varphi - \delta) - 2/\pi) \eta - 4\pi R^3 (\sin (\varphi - \delta) - 2/\pi) = 0,$$

$$\eta^3 - R^2 (2/\pi - \sin (\varphi + \delta)) \eta - 4\pi R^3 (2/\pi - \sin (\varphi + \delta)) = 0.$$

Entwickelt man nun diese Ausdrücke, so erhält man als Differenz der verschiedenen Theile der Coefficienten $2 \cos \delta - 2$, welche sich mit δ zugleich der 0 nähert, also können auch die η keinen Sprung machen.

Zur Bestimmung der grössten η ergeben sich* daraus die Gleichungen

oder 1.) $\eta^3 + (2/\pi - 1) \eta + (2/\pi - 1) \cdot 40 = 0$

$$\eta^3 - 0,36338\eta - 0,36338 \cdot 40 = 0;$$

oder 2.) $\eta^3 - 2/\pi \cdot \eta - 2/\pi \cdot 40 = 0$

$$\eta^3 - 0,63662\eta - 0,63662 \cdot 40 = 0.$$

Die verschiedenen Maxima von η liegen bei

1.) zwischen 2 und 3; bei 2.) zwischen 3 und 4.

Die Rechnung nach den obigen Gleichungen giebt

Halbmesser des Querschnittes.	Der zugehörige Centriwinkel.
0	39° 32', 39° 32',
0,5	39° 46', 39° 18',
1	41° 22', 37° 45',
1,5	45° 53', 33° 44',
2	55° 48', 26° 30',
2,4	74° 17', 18° 6',
2,5	15° 36',
3	30'.

Der Werth $\eta = 0$ erfordert in der Praxis eine nothwendige Vergrößerung der berechneten Werthe. Abgekürzt erhält man

$$1.) \eta = 2,7144 \sqrt[3]{\sin s/a - 2/\pi},$$

$$2.) \eta = 2,7144 \sqrt[3]{2/\pi - \sin s/a}.$$

Die grösste Spannung bei gleichförmigem Querschnitte findet also statt in den Punkten, in denen die ringförmig gebogenen Körper von den angebrachten Kräften gezogen werden, es wird an diesen Punkten ein Zerdrücken zu befürchten sein; desswegen ist es zweckmässig, bei Ketten zwischen die einzelnen Glieder Querstangen einzusetzen, wodurch dann verhindert wird, dass sich die einzelnen Kettenglieder ausrenken. Ketten mit solchen Querstangen heissen Brunton'sche Ketten.

§ 9.

Zu den Gleichungen über die Spannungen können wir, ohne erst die Untersuchung über die Biegungslinie vorzunehmen, auf folgende Weise kommen. Betrachten wir irgend zwei Punkte des Körperelementes, welches auf das rechtwinkelige Coordinatensystem xyz bezogen ist (die Lage der Coordinaten ist dieselbe wie oben), deren Entfernung von einander ζ sei, und suchen die Veränderung dieser Entfernung $\Delta\zeta$. Bildet die Verbindungslinie dieser Punkte mit der z -Axe den spitzen Winkel φ , und deren Projection auf die xy -Ebene mit der y -Axe den Winkel ψ , der zwischen 0° und 360° liegen kann, so ist dann nach Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, p. 30, oder Grashof, *Encyclopädie der Physik*, V, p. 131,

$$\Delta\zeta = \zeta \left\{ \frac{dw}{dz} \cos^2 \varphi + \left[\frac{dv}{dy} \cos^2 \psi + \frac{du}{dx} \sin^2 \psi \right] \sin^2 \varphi + \left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \sin \psi + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \cos \psi \right] \sin \varphi \cos \varphi \right\}.$$

Berücksichtigt man § 3 (1.), so erhält man die Aenderung der Längeneinheit

$$\frac{\Delta\zeta}{\zeta} = \frac{dw}{dz} (\cos^2 \varphi - \mu \sin^2 \varphi) + \left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \sin \psi + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \cos \psi \right] \sin \varphi \cos \varphi.$$

Um nun zu untersuchen, für welchen Werth von φ und ψ diese Längenänderung ein Maximum ist, müssen wir das Differenzial von $\Delta\zeta$ nach ψ und φ gleich 0 setzen und die sich daraus ergebenden Werthe von φ und ψ berechnen. Die beiden resultirenden Gleichungen sind

$$\left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \cos \psi - \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \sin \varphi \right] \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

$$(1 + \mu) \frac{dw}{dz} \sin 2\varphi +$$

$$\left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \sin \psi + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \cos \psi \right] \cos 2\varphi = 0.$$

Diess giebt

$$\operatorname{tag} \psi = \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) : \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right),$$

$$\operatorname{tag} 2\varphi = \frac{\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \sin \psi + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \cos \psi}{(1 + \mu) \frac{dw}{dz}}.$$

Da ψ im ersten und dritten Quadranten liegen kann, so können $\sin \psi$ und $\cos \psi$ auch positiv oder negativ sein, mithin muss sein

$$\operatorname{tag} 2\varphi = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right)^2}}{(1 + \mu) \frac{dw}{dz}}.$$

Die Berücksichtigung dieser Werthe giebt

$$\operatorname{Max.} \frac{\Delta \zeta}{\zeta} = \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dz} (1 - \mu) \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right)^2} \right].$$

Dieser Werth ist entweder positiv oder negativ und bedeutet demnach eine Ausdehnung oder Verkürzung; da es aber zur Berechnung der Spannung nur auf den absoluten Werth ankommt, so müssen wir die Quadratwurzel positiv lassen und vor dem rationalen Gliede beide Zeichen nehmen. Setzen wir nun in diesen Ausdruck die § 2 angegebenen Werthe der Elasticitätskräfte, so erhalten wir

Max. der Verschiebung

$$= \pm \frac{1}{2E} (1 + \mu) t_{33} + \frac{1}{2E} (1 + \mu) \sqrt{t_{33}^2 + 4t_{13}^2 + 4t_{23}^2}.$$

In diesen Ausdruck sind nun die Werthe von t_{33} , t_{13} , t_{23} aus § 3 einzusetzen und zwar können wir, der Einfachheit wegen, da wir die grösste Spannung in irgend einem Querschnitte suchen, sogleich den ersten des Elementes nehmen, also $z = 0$ setzen. Ausserdem müssen wir auch dieselben Vernachlässigungen wie oben machen und berücksichtigen, dass die Spannungen, welche die kreisförmige Krümmung verursachen, nicht zum Bruch beitragen können. Die Vergleichung mit dem Cylinder, dessen Halbmesser R gesetzt worden ist, giebt demnach

$$\frac{P}{\pi R^2} = \frac{1}{2} \left\{ \pm (1 + \mu) \frac{P \sin s/a}{\pi \eta^2} \left(1 \pm \frac{4a}{\eta} \right) + \right. \\ \left. (1 + \mu) \sqrt{\left(1 \pm \frac{4a}{\eta} \right)^2 \frac{P^2 \sin^2 s/a}{\pi^2 \eta^4}} \right\}.$$

Man erkennt nun leicht, dass für die Aussenseite das negative und die Innenseite das positive Zeichen genommen werden muss und dann, dass die Spannung an der Innenseite grösser ist als an der Aussenseite, mithin zur Berechnung der η überall das positive Zeichen gesetzt werden muss. Wir erhalten also

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin s/a}{\eta^2} \left(1 + \frac{4a}{\eta} \right) \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \right] = \sin s/a \left(\frac{1}{\eta^2} + \frac{4a}{\eta^3} \right).$$

Diess ist dieselbe Gleichung, die wir oben schon gefunden haben.

§ 10.

Berechnung der Dimensionen eines Hakens von gleichem Widerstande nach Grashof*), Wiebe**) und Redtenbacher***).

1) Berechnung nach Grashof.

Die innere Begrenzungslinie des Hakens in dem Durchschnitte gebildet von der Ebene der Mittellinie sei ein Kreis vom Halbmesser a und alle Querschnitte des Hakens seien unter einander ähnliche symmetrische Figuren von gegebener Form, die gleich liegen gegen die Symmetrie-Ebene. Es wird berechnet die äussere Begrenzungslinie in der Symmetrie-Ebene. Unter Querschnitt wird verstanden der Schnitt senkrecht zur inneren begrenzenden Kreislinie, und der geometrische Ort der Schwerpunkte aller so entstandenen Querschnitte ist die Mittellinie. Diese Schwerpunkte bilden zugleich die Anfangspunkte der für die Elemente eingeführten Coordinatensysteme; es ist also hier im Allgemeinen die z -Axe nicht die Mittellinie berührend. Sei nun s der Bogen des Kreises vom festen Punkte an, e der Abstand des Schwerpunktes eines Querschnittes vom begrenzenden Kreise und 2η der veränderliche Durchmesser des Querschnittes, dessen Verlängerung also nach Obigem durch den Mittelpunkt des begrenzenden Kreises geht. Es sind dann die Componenten der Kraft P nach den drei Axen x, y, z $P \cos s/a, 0, P \sin s/a$ und von den Drehungsmomenten existirt nur das eine um die y -Axe, es ist

*) Angewandte Mechanik, § 28. (In der Allgemeinen Encyklopädie der Physik, herausgegeben von Karsten.)

**) Die Lehre von der Befestigung der Maschinentheile, § 65.

***) Resultate für den Maschinenbau, § 94.

$P(a + e) \sin s/a$. Wir erhalten demnach wie § 3 zur Bestimmung der elastischen Kräfte folgende Gleichungen:

$$\int t_{13} dq = P \cos s/a,$$

$$\int t_{23} dq = 0,$$

$$\int t_{33} dq = P \sin s/a,$$

$$\int t_{33} y dq = 0,$$

$$\int t_{33} x dq = P(a + e) \sin s/a,$$

$$\int (t_{23} x - t_{13} y) dq = 0.$$

Setzt man nun $t_{33} = a + by + cx$, so erhält man aus obigen Integralen, wenn man berücksichtigt, dass der Anfangspunkt der Coordinaten der Schwerpunkt ist und dass die x -Axe und y -Axe in Folge der Symmetrie Hauptträgheitsachsen sind,

$$a = \frac{P \sin s/a}{q}, \quad b = 0, \quad c = \frac{P(a + e) \sin s/a}{\lambda^2 q},$$

wo das Trägheitsmoment des Querschnittes bezogen auf die y -Axe mit $\lambda^2 q$ bezeichnet ist. Mithin

$$t_{33} = \frac{P \sin s/a}{q} + \frac{P(a + e) \sin s/a}{\lambda^2 q} x.$$

Setzt man ebenso die anderen Kräfte linearen Funktionen von x und y gleich, so findet man die constanten Glieder mit Hülfe der obigen Integrale. Die Coefficienten der Veränderlichen ergeben sich aber $= 0$, weil keine Verdrehung der Querschnitte gegeneinander stattfinden soll, also

$$t_{23} = 0, \quad t_{13} = \frac{P \cos s/a}{q}.$$

Werden diese Werthe in die Formel § 9 eingesetzt, so erhält man die grösste Verschiebung in irgend einem Querschnitte. Diese ist demnach

$$\frac{P}{2} \left\{ \pm (1 - \mu) \left[\frac{1}{q} + \frac{a + e}{q \lambda^2} x \right] \sin s/a + \sqrt{(1 + \mu)^2 \left[\frac{1}{q} + \frac{a + e}{q \lambda^2} x \right] \sin^2 s/a + \frac{4(1 + \mu)^2}{q^2} \cos^2 s/a} \right\}$$

Dieser Werth erreicht sein Max. in einem Endpunkte des Durchmessers, also für

$$x = e \text{ oder } x = -(2\eta - e)$$

und es ist nun weiter zu untersuchen, welcher der grösste der sich hieraus ergebenden Werthe ist. Man muss berücksichtigen, dass der rationale Theil, um den absoluten Werth zu erhalten, immer positiv sein muss, so dass also für $x = e$ stets das positive Vorzeichen und für $x = -(2\eta - e)$ entweder das positive oder negative Vorzeichen genommen werden muss, je nachdem $\frac{1}{q} - \frac{a + e}{q \lambda^2} (2\eta - e) \geq 0$ ist. Diess heisst, wenn das positive Vorzeichen genommen wird, so erfährt die Faser eine Ausdehnung und wenn das negative Vorzeichen genommen wird, so wird die Faser verkürzt. Ist aber obiger Ausdruck grösser als 0, so ist nothwendig

$$\frac{1}{q} + \frac{a + e}{q \lambda^2} e > \frac{1}{q} - \frac{a + e}{q \lambda^2} (2\eta - e),$$

es ist also dann für $x = e$ das Maximum, d. h. die Ausdehnung des Hakens ist an der Innenseite grösser, als an der Aussenseite.

Ist aber obiger Ausdruck < 0 , so entspricht dann dem $x = e$ das Max., wenn

$$\frac{1}{q} + \frac{a + e}{q \lambda^2} e \geq - \frac{1}{q} + \frac{a + e}{q \lambda^2} (2\eta - e)$$

oder

$$\eta - e \leq \frac{\lambda^2}{a + e} \odot.$$

Die Grössen e , λ , q sind aber nicht von einander unabhängig, wegen der Aehnlichkeit der Querschnitte, wir setzen daher

$$e = 2\alpha\eta, \quad \lambda^2 = 4\beta\eta^2, \quad q = 4\gamma\eta^2,$$

wo α , β , γ reine Zahlen bedeuten. Durch Benutzung dieser Gleichungen geht die Bedingung $\odot$ in folgende über

$$1 - 2\alpha \leq \frac{4\beta\eta}{a + 2\alpha\eta}$$

und das Max. der Verschiebung ist dann

$$\frac{P}{2} \left\{ (1 - \mu) \left[\frac{1}{4\gamma\eta^2} + \frac{(a + 2\alpha\eta)\alpha}{8\beta\gamma\eta^3} \right] \sin s/a + \right. \\ \left. (1 + \mu) \sqrt{\left(\frac{1}{4\gamma\eta^2} + \frac{(a + 2\alpha\eta)\alpha}{8\beta\gamma\eta^3} \right)^2 \sin^2 s/a + \frac{1}{4\gamma^2\eta^4} \cos^2 s/a} \right\}$$

oder, wenn $\odot$ nicht erfüllt ist, also die Verkürzung an der Aussenseite grösser als die Verlängerung an der Innenseite

$$\frac{P}{2} \left\{ (1 + \mu) \left[-\frac{1}{4\gamma\eta^2} + \frac{(a + 2\alpha\eta)(1 - \alpha)}{8\beta\gamma\eta^3} \right] \sin s/a + (1 + \mu) \right. \\ \left. \sqrt{\left(-\frac{1}{4\gamma\eta^2} + \frac{(a + 2\alpha\eta)(1 - \alpha)}{8\beta\gamma\eta^3} \right)^2 \sin^2 s/a + \frac{1}{4\gamma^3\eta^4} \cos^2 s/a} \right\}.$$

Dieser letztere Ausdruck ist aber nicht weiter zu berücksichtigen, da die Bedingung $\odot$ in der Praxis immer erfüllt ist.

Vergleichen wir dann ebenso wie oben die Dimensionen des Hakens mit denen des Cylinders, an welchem derselbe angebracht ist, so erhalten wir, wenn ferner $\mu = \frac{1}{4}$, $a = nR$ und $\eta = yR$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\pi R^2} = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4\gamma y^2 R^2} + \frac{(a + 2\alpha y R)}{8\beta\gamma y^3 R^3} \right) \sin s/a + \\ \frac{5}{8} \sqrt{\left(\frac{1}{4\gamma y^2 R^2} + \frac{(a + 2\alpha y R)\alpha}{8\beta\gamma y R} \right)^2 \sin^2 s/a + \frac{1}{4\gamma^2 y^4 R^4} \cos^2 s/a.}$$

Zur numerischen Berechnung ist von Grashof der für die praktische Ausführung gewöhnliche Werth $n = 1\frac{2}{3}$ genommen,

ein Werth, der bei der obigen Untersuchung wegen der vorgenommenen Vernachlässigungen nicht gebraucht werden konnte. Um die Rechnungen den obigen ungefähr entsprechend zu machen, setzen wir hier $n = 6$.

Ist nun der Querschnitt ein Kreis, so ist $e = r$, mithin $\alpha = \frac{1}{2}$, ferner $q = \pi r^2$, mithin $\gamma = \frac{1}{4}\pi$ und $\lambda^2 = \frac{1}{4}r^2$, also $\beta = \frac{1}{16}$, woraus sogleich hervorgeht, dass die Bedingung $\odot$ wirklich erfüllt ist. Die Einsetzung dieser Werthe giebt endlich zur Berechnung von y folgende Gleichung:

$$y^6 - 3\frac{3}{4} \sin s/a y^4 - 18 \sin s/a \cdot y^3 - (6\frac{1}{4} \sin^2 s/a + 1\frac{9}{16} \cos^2 s/a) y^2 - 60 \sin^2 s/a y - 144 \sin^2 s/a = 0.$$

Die Berechnung nach dieser Gleichung giebt viel grössere Werthe als die obigen; denn man würde z. B. für $s/a = 0, 30^\circ, 90^\circ$ Werthe erhalten, die grösser als 1, 2, 4 und kleiner als 2, 3, 5 sind.

2) Berechnung nach Wiebe.

Es wird in dieser Rechnung ebenso wie bei 1) die innere Begrenzungslinie als Kreis gesetzt und dann der Durchmesser des Querschnittes berechnet. Die Kraft P wird auch ebenso wie oben zerlegt in zwei Componenten, von denen die eine mit der Richtung des Querschnittes zusammenfällt, während die andere senkrecht darauf wirkt. Letztere Componente $P \sin s/a$ wirkt auf Abreissen des Querschnittes, indem dieselbe eine Drehung um den entferntesten Punkt des Hakens zu erzeugen strebt, welcher Drehung der Querschnitt des Hakens durch seine absolute Festigkeit widerstehen muss. Diess führt mit Beibehaltung der oben eingeführten Bezeichnungen zur folgenden Gleichung für kreisförmige Querschnitte, wenn die Festigkeit wie oben mit der absoluten Festigkeit des cylindrischen Fortsatzes verglichen wird:

$$P \sin s/a \cdot \frac{a + 2\eta}{\eta} = q \cdot \frac{P}{\pi R^2}.$$

oder

$$\frac{nR + 2\eta}{\eta} \sin s/a = \frac{\eta^2}{R^2}$$

und daraus

$$\frac{n + 2y}{y} \sin s/a = y^2,$$

$$y^3 - 2 \sin s/a \cdot y - n \sin s/a = 0.$$

Zur Berechnung von y soll dann folgendes abgekürzte Verfahren angewandt werden. Mit Hülfe der Cardanischen Formel würde man nach einer leichten Transformation erhalten:

$$y = \sqrt[3]{\frac{n}{2} \sin s/a} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{32 \sin s/a}{27 n^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{32 \sin s/a}{27 n^2}}} \right\}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{1 - \frac{32 \sin s/a}{27 n^2}}$, welcher sich mit $\sin s/a$ ändert, ist als constant angenommen und zwar ist ein für allemal für $\sin s/a$ derjenige Werth genommen werden, welcher den Ausdruck in der Klammer $\{ — \}$ möglichst gross macht. Diess wird erreicht, wenn man $\sin s/a = 1$ setzt, so dass wir also erhalten

$$y = \sqrt[3]{\frac{n}{2} \sin s/a} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27 n^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27 n^2}}} \right\}.$$

Setzen wir nun, um die aus dieser Formel zu berechnenden Werthe der Halbmesser mit unseren obigen Werthen vergleichen zu können, $n = 6$, so ist

$$y = \sqrt[3]{3 \sin s/a} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{8}{243}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{8}{243}}} \right\}$$

$$y = 2,18 \sqrt{\sin s/a}.$$

Die Berechnung der Werthe y nach dieser Formel würde also kleinere Halbmesser als die obigen geben.

3) Berechnung nach Redtenbacher.

Es ist hier angenommen, dass die Kraft P an einem Hebelarme wirkt, der gleich ist dem Abstände der Richtungslinie der Kraft vom Schwerpunkte des Hakenquerschnittes und dass diese Kraft eine Drehung um eine durch diesen Schwerpunkt gehende centrale Axe erzeugt und so den Haken abzubrechen strebt. Berücksichtigt man dann, dass das Widerstandsmoment des Körpers mit kreisförmigem Querschnitte $\frac{\pi \eta^3}{4}$ ist, so erhält man bei der Vergleichung mit dem Cylinder folgende Gleichung:

$$P \sin s/a (a + \eta) = \frac{P}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi \eta^3}{4}$$

oder

$$y^3 - 4 \sin s/a - 4n \sin s/a = 0.$$

Die sich hieraus ergebenden Werthe von y sind grösser als die von Wiebe, aber doch noch kleiner als unsere.

Die Berechnung soll nun geschehen, indem man verschiedene Werthe von y annimmt und dann die zugehörigen Werthe von s/a berechnet, wie es oben geschehen ist.

Wiebe hat auch auf diese Formel ein ähnliches Näherungs-Verfahren wie bei der obigen Berechnung angewandt, so dass man erhalten würde für $n = 6$:

$$y = 1,542 \sqrt{\sin s/a}.$$

§ 11.

Ein Körper von der Form, wie § 8 angegeben ist, wird seine Anwendung als Kettenglied finden können. Den Kettengliedern giebt man aber gewöhnlich eine ovale Form, so dass die obigen Resultate in der wirklichen Ausführung eine bedeutende Abänderung erfahren müssen. Die Dimensionen solcher ovalen Kettenglieder sind bestimmt worden von Wiebe*) und Redtenbacher**). Die Berechnung geschieht auf zweierlei Art. Das einfachste Verfahren besteht darin, dass man annimmt, die Belastung der Kette beanspruche nur die absolute Festigkeit der Kettenglieder und ein Bruch des Kettengliedes könne nur durch Zerreißen desselben in der Mitte erfolgen. Unter dieser Voraussetzung hätte man mit den oben in § 8 gewonnenen Bezeichnungen $\frac{P}{2q} = C$ also $\eta^2 = \frac{1}{2} R^2$. Bei genauerer Berechnung berücksichtigt man noch, dass durch die Belastung der Kette, bevor ein Zerreißen eintritt, die Glieder ausgerenkt werden, d. h. die eine Axe der Glieder wird sich verlängern, so dass auch jedes Glied in Bezug auf seine Bruchfestigkeit in Anspruch genommen wird. Man denke sich die ganze Belastung P aus zwei Werthen, P' und P'' , bestehen, deren einer Theil P' durch den Widerstand gegen das Abreißen, während P'' durch den Widerstand gegen das Abbrechen aufgehoben wird. Die erste, P' , giebt dann $\frac{P'}{2q} = C$. Zur Berechnung der zweiten nehme man beide Hälften des Kettenringes als Stäbe, welche mit ihren Enden frei aufliegen

*) § 59. **) § 60.

und in der Mitte belastet sind. Es ist aber in jeder Mitte die volle Belastung P'' zu nehmen. Darnach findet man

$$P''a = \pi \eta^3 C, \text{ also } P'' = \frac{\pi \eta^3}{a} C,$$

mithin für die Gesamtbelastung:

$$P = P' + P'' = (2q + \pi \eta^3) C.$$

$$= \pi \eta^2 (2 + \eta) C.$$

$$1 = \frac{\eta^2 (2 + \eta/a)}{R^2}$$

$$\eta^3 + 2a\eta^2 = aR^2.$$

Schulnachrichten.

und in der Mitte belastet sind. Es ist aber in jeder Mitte die volle Belastung P'' zu nehmen. Darnach findet man

$$P'' = \frac{2}{3} P' \quad \text{also} \quad P'' = \frac{2}{3} C$$

mitteln für die Gesamtbelastung:

$$P = P' + P'' = (2 + \frac{2}{3}) C = \frac{8}{3} C$$

es eine geordnete Anzahl n von Stäben, so ist

$$P = \frac{8}{3} n C$$

oder wenn man C nach P ausdrückt, so erhält man

$$C = \frac{3}{8} \frac{P}{n}$$

Man sieht, dass die Belastung P um so viel größer ist, je mehr Stäbe n man nimmt.

Man kann auch die Belastung P in der Mitte der Stäbe bestimmen.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Man stellt sich die Stäbe so, dass die Mitte der Stäbe in der Mitte der Kette liegt.

Uebersicht

des
öffentlichen von Ostern 1864 bis Ostern 1865
ertheilten Unterrichts.

II.

Schulnachrichten.

- a. Religionslehre. Im vorangehenden Abschnitte der Schulnachrichten sind die in der Kirchenordnung und in der Kirchenordnung des Landes für die evangelische Kirche in Preussen vom 1. April 1864. Michael.
- b. Lateinische Sprache. Sommer: Cicero, de officiis, III. W. 3 St. Scheibel. Horatius, Satiren, von Asinius, W. 2 St. Fischer. Winter: Tacitus, Annalen, IV bis VI, W. 3 St. Scheibel. Horatius, Oden, von Asinius, W. 3 St. Fischer. 2. in beiden Semestern: Scripta (nach Schöns Materialien), Aufsätze und Lateinproben, W. 3 St. Scheibel.
- c. Griechische Sprache. Sommer: Sophocles, Philokles, W. 2 St. Scheibel. Platon, Apologie und Kriton, W. 3 St. Fischer. Winter: Sophocles, König Oedipus, W. 3 St. Scheibel. Platon, Protagoras, W. 3 St. in beiden Semestern: Scripta, Exercitationen, W. 1 St. Fischer.
- d. Deutsche Sprache. Schriftliche Aufsätze. Erste Reihe: Geschichte der deutschen Literatur von Goethe an, verbunden mit Lektüre deutscher Prosawerke: Goethe, Schiller, Jean Paul und der Sturm und Drang. Im Sommer v. 3 St. im Winter v. 2 St. Michael.
- e. Französische Sprache. Sommer: Histoire littéraire des 18. Jahrhunderts: Montaigne, Voltaire, Rousseau, Buffon etc. Winter: Lektüreproben des 18. Jahrhunderts: La Fontaine, Molière, Corneille, Racine, Voltaire, Y. Rost, etc.

II.

Schulnachrichten.

Uebersicht

des

öffentlichen von Ostern 1864 bis Ostern 1865
ertheilten Unterrichts.

Prima.

Ordinarius: Rector Professor Dr. Scheibe.

- a. Religionslehre. Die wichtigsten Abschnitte der Kirchengeschichte, mit besonderer Berücksichtigung der Kampfesperioden und der Beziehungen zwischen Christenthum und Bildung. Wöchentlich 2 Stunden. Michael.
- b. Lateinische Sprache. Sommer: Cic. de oratore III. W. 3 St. Scheibe. Horatius Satiren mit Auswahl. W. 2 St. Fleckeisen. Winter: Taciti Annales IV bis VI 27. W. 3 St. Scheibe. Horatius Oden und ausgewählte Epoden. W. 2 St. Fleckeisen. In beiden Semestern: Scripta (nach Seyfferts Materialien), Aufsätze und Extemporalien. W. 3 St. Scheibe.
- c. Griechische Sprache. Sommer: Sophokles Philoktetes. W. 2 St. Scheibe. Platons Apologie und Kriton. W. 3 St. Pfuhl. Winter: Sophokles König Oedipus. W. 2 St. Scheibe. Platons Protagoras. W. 3 St. In beiden Semestern: Syntax, Scripta, Extemporalien. W. 1 St. Pfuhl.
- d. Deutsche Sprache. Schriftliche Aufsätze. Freie Vorträge. Geschichte der neuesten deutschen Litteratur von Goethe (incl.) an, verbunden mit Lectüre (unter vorwiegender Berücksichtigung Goethes, Schillers, Jean Pauls und der Romantiker). Im Sommer w. 3 St., im Winter w. 2 St. Menzel.
- e. Französische Sprache. Sommer: Litteraturgeschichte des 18. Jahrhunderts: Montesquieu, Voltaire, Rousseau, Buffon etc. Winter: Litteraturgeschichte des 19. Jahrhunderts: Mad. de Staël, Chateaubriand, Casimir Delavigne, Lamartine, V. Hugo,

- Béranger etc. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus Wilhelm Tell von Schiller, schriftliche Uebungen und freie Aufsätze. W. 3 St. Schuman-Leclercq.
- f. Englische Sprache. Grammatik nach Kade. Schriftliche und mündliche Uebersetzung der Aufgaben. Gelesen: Richard the Second von Shakespeare. Conversation. W. 2 St. Sherwood.
- g. Geschichte. Neuere Geschichte, zweite Hälfte. Im Sommer w. 2 St., im Winter w. 3 St. Menzel.
- h. 1) Geometrie. Trigonometrie, algebraische Lösung geometrischer Aufgaben, Kegelschnitte analytisch behandelt. W. 2 St. Klein.
2) Arithmetik. Binomischer Lehrsatz mit negativen und gebrochenen Exponenten, Progressionen, Zinseszins und Rentenrechnung. W. 2 St. Klein.
- i. Physik. Mechanik. W. 2 St. Klein.
- k. Philosophische Propädeutik. Sommer: Geschichte der griechischen Philosophie. Winter: Philosophische Grammatik. W. 1 St. Polle.

Secunda.

Ordinarius: Conrector Professor Dr. Fleckeisen.

- a. Religion. Erklärung ausgewählter Abschnitte des alten (im Sommer) und des neuen Testaments (im Winter). W. 2 St. Michael.
- b. Lateinische Sprache. Sommer: Ciceros Cato maior und Laelius. Winter: Ciceros Reden für Ligarius und für Milo. W. 2 St. In beiden Semestern: Livius Buch XXIII und XXIV. W. 2 St. Vergilius Aeneis Buch IV—VII. W. 2 St. Scripta (nach Seyfferts Uebungsbuch), Aufsätze und Extemporalien. W. 2 St. Fleckeisen.
- c. Griechische Sprache. Arrianos Anabasis mit Auswahl, W. 2 St. Grammatik (nach Krüger), Scripta (nach Halms Anleitung) und Extemporalien. W. 2 St. Fleckeisen. Homers Ilias XVIII—XXIII. W. 2 St. Scheibe.
- d. Deutsche Sprache. Schriftliche Aufsätze. Freie Vorträge. Declamationsübungen. Geschichte der mittelhochdeutschen Literatur, Lectüre des II. Theils des Nibelungenliedes, einiger Aventiuren der Gudrun und ausgewählter Dichtungen Walthers von der Vogelweide. Lectüre aus der neueren Litteratur:

Julius Cäsar von Shakespeare, Goethes Götz und Egmont. Die Lehre von den Tropen und Figuren. Im Sommer 3 St., im Winter 2 St. Menzel.

- e. Französische Sprache. Grammatik nach Noël und Chapsal, Syntax, vom 16. bis zum 24. Capitel, w. 1 St. Uebersetzungen aus dem 30jährigen Kriege von Schiller; schriftliche Arbeiten. Lectüre: Les grands faits de l'histoire de France. Vorträge. Schuman-Leclercq.
- f. Englische Sprache. Kades Grammatik von § 159 bis § 262. Die Regeln ins Englische übersetzt und in derselben Sprache wiederholt. Schriftliche Uebersetzung der Aufgaben. Gelesen wurde: Marryats „Three Cutters“, Thackerays „Oliver Goldsmith“ und einzelne Stücke aus Goldsmiths Dichtungen. Einzelne Gedichte wurden auswendig gelernt. Conversation. W. 2 St. Sherwood.
- g. Geschichte. Mittelalter, zweite Hälfte. Im Sommer 2 St., im Winter 3 St. Menzel.
- h. 1) Geometrie. Linienverhältnisse, Aehnlichkeit der Figuren, Flächenberechnung, nach dem Leitfaden II. Cap. IV—IX, XIV, XV. W. 2 St. Klein.
2) Arithmetik. Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Progressionen, Zahlenlehre. W. 2 St. Klein.
- i. Physik. Akustik, Electricität. W. 2 St. Klein.

Tertia.

Ordinarius: Tertius Professor Dr. Pfuhl.

- a. Religionslehre. Repetition des 2. Artikels, Erklärung des 3. Artikels, des 3., 4. und 5. Hauptstückes. Auswendiglernen von Sprüchen und Liedern. W. 2 St. Michael.
- b. Lateinische Sprache. Ovidius Metamorphosen, Auswahl aus Buch VI—XI. W. 2 St. Fleckeisen. Caesar Bell. Gall. I und II, V und VI. W. 3 St. Repetition der Hauptregeln der Syntax. W. 1 St. Correctur der Scripta. W. 1 St. Extemporalien. W. 1 St. Pfuhl.
- c. Griechische Sprache. Xenophons Anab. I—III. W. 2 St. Hom. Odyss. VIII (mit Auswahl) bis XI. W. 2 St. Grammatik. W. 1 St. Scripta und Extemporalien. W. 1 St.

- d. Deutsche Sprache. Abriss der Rhetorik. Lectüre ausgewählter Stücke aus Masius Lesebuch II, ferner des Herderschen Cid und der Schillerschen Maria Stuart. Declamationsübungen und freie Vorträge. Alle drei Wochen ein Aufsatz. W. 2 St. Polle.
- e. Französische Sprache. Grammatik nach Noël und Chapsal. W. 1 St. Uebersetzung aus Fränkels Anthologie. W. 1 St. Lectüre des Charles XII. Declamation. W. 1 St. Schuman-Leclercq.
- f. Englische Sprache. Kades Grammatik vom Anfang bis zu § 159. Schriftliche Uebersetzungen der Uebungsbeispiele in der Grammatik. Gelesen wurde aus Herrigs Classical Authors „Voyage to Lilliput.“ Sprechübungen. W. 2 St. Sherwood.
- g. Geschichte. Römische Geschichte. W. 2 St. Menzel.
- h. Geographie. Politische Geographie der vier aussereuropäischen Erdtheile. W. 1 St. Ebert.
- i. 1) Geometrie. Zusammenhang der Bestandtheile des Vier- und Vielecks unter einander, Kreislehre, Flächengleichheit. nach dem Leitfaden I. Cap. IX—XII. II. Cap. X—XII. I—III. Constructionen nach Wöckel. W. 2 St. Klein.
2) Arithmetik. Die vier ersten Rechnungsarten mit Buchstaben, Rechnen mit relativen Zahlen, Potenzen und Wurzeln des 2. und 3. Grades. W. 2 St. Klein.
- k. Naturlehre. Sommer: Physische Geographie. Atmosphärologie und Vulcanismus. Winter: Mathematische Geographie. Die Erscheinungen am Himmel und ihre Erklärungen; physische Beschaffenheit der Himmelskörper. W. 2 St. Ebert.
- l. Zeichnen. W. 2 St. Schurig.

Quarta.

Ordinarius: Quartus Dr. Polle.

- a. Religionslehre. Sommer: Erklärung des 1. Glaubensartikels. Winter: Erklärung des Ev. Matthäi, mit besonderer Berücksichtigung der Bergpredigt. Auswendiglernen von Sprüchen und Liedern. W. 2 St. Michael.
- b. Lateinische Sprache. Grammatik nach Middendorf und Grüter I. Th. 2. Kap. 23 bis zu Ende. W. 1 St. Zurückgabe der Scripta. W. 1 St. Extemporalien. W. 1 St. Lectüre: Jacobs und Dörings lateinisches Elementarbuch II. Bändchen mit

Auswahl. Corn. Nepos VI, VII, XI—XIV, XX. W. 2 St. Polle. Syntaktische Uebungen, w. 1 St. Prosodie und Lectüre aus der „Dichterschule“. W. 2 St. Pfuhl.

- c. Griechische Sprache. Formenlehre nach Krüger § 25—40. W. 1 St. Uebersetzen aus dem Deutschen ins Griechische nach Halms Anleitung I. Th. 1. Cursus und 2. Cursus § 1—14 mit Auswahl. W. 1 St. Lectüre aus Halms Lesebuch. W. 2 St. Zurückgabe der Scripta. W. 1 St. Extemporalien. W. 1 St. Polle.
- d. Deutsche Sprache. Lesen, Erklären von Gedichten, Declamieren, Aufsätze, Dictate. W. 3 St. Jancovius.
- e. Französische Sprache. Grammatik nach Plötz II. Cursus. Lectüre aus der Chrestomathie von Plötz. Schriftliche Arbeiten. Declamation. W. 3 St. Schuman-Leclercq.
- f. Geschichte. Geschichte der Griechen von den Urzeiten bis zur Zerstörung von Korinth. W. 2 St. Polle.
- g. Geographie. Europa und speciell Deutschland. W. 2 St. Ebert.
- h. 1) Geometrie. Lagenuntersuchungen, Congruenz der Dreiecke und Constructionen nach dem Leitfaden I. Cap. I—VIII.
2) Arithmetik. Numerieren nach verschiedenen Systemen, Decimalbrüche, Addieren und Subtrahieren mit Buchstaben, relative Zahlen. W. 2 St. Klein.
- i. Naturgeschichte. Sommer: Mineralogie. Die morphologischen und physischen Eigenschaften der Mineralien. Specielle Beschreibung einiger wichtiger Mineralspecies. Winter: Geognosie. Petrographie und Formationslehre mit Berücksichtigung der vorzüglichsten Fossilien. W. 2 St. Ebert.
- k. Zeichnen. W. 2 St. Schurig.

Quinta superior (A).

Ordinarius: Religions- und Oberlehrer Michael.

- a. Religionslehre. Biblische Geschichte: die Geschichten des neuen Testaments. W. 1 St. Katechismuslehre: erstes Hauptstück. Der erste und zweite Artikel des zweiten Hauptstücks. Auswendiglernen von Sprüchen und Liedern. W. 2 St. Caspari.
- b. Lateinische Sprache. Grammatik nach Middendorf und Gräter I. Theil 2. Abtheilung § 22—§ 79. Schriftliche und

- mündliche Uebersetzung der Uebungsbeispiele. Erlernen der Vocabeln § 147—193 (anomale Verba) und § 234—313. Extemporalien. Declamation. W. 6 St. Michael. Lectüre von Jacobs und Dörings Elementarbuch I. Bändchen mit Auswahl. W. 2 St. Fleckeisen.
- c. Griechische Sprache. Formenlehre nach Krüger § 1—25, sowie das regelmässige Verbum purum. Uebersetzen aus dem ersten Cursus von Halms Elementarbuch und Lectüre von Halms Lesebuch. Scripta und Extemporalien. W. 3 St. Polle.
 - d. Deutsche Sprache. Lectüre aus Masius Lesebuch I. Theil. Aufsätze. Dictate. Erzählen. Declamieren. W. 3 St. Michael.
 - e. Französische Sprache. Grammatik nach Georg § 160—200 (1. Abtheilung), § 82—120 (2. Abtheilung). Schriftliche Arbeiten. W. 2 St. Lectüre aus Seineckes II. Cursus. Declamation. W. 1 St. Schuman-Leclercq.
 - f. Geschichte. Mittelalter und Repetition der Geschichte des Alterthums. W. 3 St. Menzel.
 - g. Geographie. Speciell die natürlichen und politischen Verhältnisse Asiens und Africas, im Ueberblick America und Australien. W. 2 St. Ebert.
 - h. Arithmetik. Bruchrechnung; angewandte Regel de tri mit Brüchen. Im Sommer w. 3, im Winter 2 St. Im Winter: Formenlehre nach Kleins Leitfaden I. § 1—33 mit Auswahl. W. 1 St. Ebert.
 - i. Naturgeschichte. Sommer: Botanik. Pflanzenmorphologie; Uebungen im Bestimmen phanerogamer Pflanzen mit Berücksichtigung des natürlichen Systems. Winter: Zoologie. Im Ueberblick die Wirbelthiere; speciell die wirbellosen Thiere. W. 2 St. Ebert.
 - k. Kalligraphie. W. 3 St. von Schweinitz.
 - l. Zeichnen. W. 2 St. Schurig.

Quinta inferior (B).

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Jancovius.

- a. Religionslehre. Combinirt mit Quinta A.
- b. Lateinische Sprache. Formenlehre. Auswendiglernen von Vocabeln (nach Wiggert sub 1 und 2). Wöchentliche Scripta und Extemporalien. Syntax nach Middendorf und Grüter I. 2.

§ 21—38. W. 8 St. Lectüre: theils aus Middendorf I. 2, theils aus Jacobs und Döring (Mythologie, Römische Geschichte) W. 2 St. Jancovius.

- c. Deutsche Sprache. Lesen, Auswendiglernen von Gedichten, Aufsätze, Dictate, Erzählen gelesener Geschichten. W. 4 St. Jancovius.
- d. Französische Sprache. Grammatik nach Georg von Nr. 61—121, die Conjugationen. Lectüre, schriftliche Arbeiten und Declamation. W. 3 St. Klin.
- e. Geschichte. Combinirt mit Quinta A.
- f. Geographie. Combinirt mit Quinta A.
- g. Arithmetik. Angewandte Regel de tri mit ganzen Zahlen; Anfänge der Bruchrechnung. W. 3 St. Ebert.
- h. Naturgeschichte. Combinirt mit Quinta A.
- i. Kalligraphie. W. 2 St. von Schweinitz.
- k. Zeichnen. W. 2 St. Schurig.

Sexta.

Ordinarius: Collaborator Caspari.

- a. Religionslehre. Biblische Geschichte: die Geschichten des alten Testaments. W. 2 St. — Katechismuslehre: erstes Hauptstück. Auswendiglernen von Sprüchen und Liedern. W. 2 St. Caspari.
- b. Lateinische Sprache. Formenlehre bis zu den verba deponentia incl. nach Middendorf und Grüter. Scripta. Extemporalien. — Auswendiglernen von Vocabeln nach Wiggert. W. 6 St. Caspari. Lectüre: Jacobs lateinisches Elementarbuch I. Cursus. W. 2 St. Jancovius.
- c. Deutsche Sprache. Leseübungen, Erzählungen. Schriftliche Nachbildung mitgetheilter Erzählungen. Orthographische Uebungen. Auswendiglernen deutscher Gedichte aus Masius Lesebuch I. W. 4 St. Caspari.
- d. Französische Sprache. Grammatik nach Georg von Nr. 1—61. Lectüre, schriftliche Arbeiten und Declamation. W. 3 St. Klin.
- e. Arithmetik. Die vier Species mit benannten und unbenannten Zahlen. Regel de tri. W. 3 St. Ebert.

- f. Geschichte. Geschichte des Alterthums. W. 3 St. Menzel.
- g. Geographie. Die Grundlehren der Geographie und kurze Uebersicht der fünf Erdtheile (nach Daniels Leitfaden). W. 2 St. Caspari.
- h. Naturgeschichte. Sommer: Botanik. Pflanzenmorphologie und Linnésches System. Winter: Zoologie. Die wichtigsten Theile der thierischen Körper und ihre Verrichtungen. Die Wirbelthiere. W. 2 St. Ebert.
- i. Kalligraphie. W. 3 St. von Schweinitz.
- k. Zeichnen. W. 2 St. Schurig.

Gesangunterricht. W. 4 St., davon für Sopran und Alt je 1 St., für Tenor und Bass zusammen 1 St., für Chorgesang 1 St. Geübt wurden mehrere vierstimmige Choräle, Arien, Motetten, verschiedene Lieder für gemischten Chor und Männerstimmen, sowie einige Chöre aus dem Bergmannsgruss von Anacker, Chor aus Templer und Jüdin und das «Halleluja» von Pfeffel und Rink. Friedrich.

Gymnastischer Unterricht. Im Sommer 8 St., im Winter 11 St., incl. 1 St. Hiebfechten. Heusinger.

Exercieren. Im Sommer w. 4 St. Rassmann.

Floretfechten. Im Winter w. 3 St. Rassmann.

Tanzunterricht. Im Winter w. 6 St. Plagge.

Verzeichnis der Lehrer.

Rector Professor Dr. Karl Scheibe.
 Conrector Professor Dr. Alfred Fleckeisen.
 Tertius Professor Dr. Christian Traugott Pfuhl.
 Quartus Dr. Friedrich Polle.
 Oberlehrer Julius Oskar Michael, erster Religionslehrer.
 Oberlehrer Dr. Hermann Klein, Lehrer der Mathematik und Physik.
 Professor Eduard Schuman-Leclercq, Lehrer des Französischen.
 Oberlehrer Dr. Rudolph Menzel, Lehrer der Geschichte und deutschen Sprache.
 Oberlehrer Dr. Robert Ebert, Lehrer der Mathematik und Naturgeschichte.
 Oberlehrer Dr. Max Jancovius.
 Collaborator Cand. rev. min. Kurt Caspari, zweiter Religionslehrer.

John Sherwood, Lehrer des Englischen.
 George Klin, Lehrer des Französischen.
 Professor Wilhelm Schurig, Zeichenlehrer.
 Bernhard von Schweinitz, Lehrer der Kalligraphie.
 Cantor Eduard Friedrich, Gesang- und Musiklehrer.
 Wilhelm Heusinger, Turnlehrer.
 Balletmeister Louis Plagge, Tanzlehrer.
 Friedrich Rassmann, Lehrer für Exercieren und Floretfechten.

Verzeichnis

der internen Alumnen oder stiftungsberechtigten
Zöglinge (A.),
der internen Pensionäre (P.) und der Extraneer (E.)
nach ihrer Vertheilung durch die einzelnen Classen.

Prima.	Auf- genommen:	Tutoren:
1. Hans von Unwerth, geb. zu Storkow in Pommern den 1. Februar 1847. (A.)	Ostern 1857.	Polle.
2. Leonhard von Egloffstein, geb. zu Weimar den 30. December 1846. (A.)	Juli 1857.	Michael.
3. Ferdinand Bode, geb. zu Dresden den 10. December 1844. (E.)	Ostern 1862.	Ebert.
4. Carl von Friesen, geb. zu Berggiesshübel den 4. Februar 1847. (E.)	Mich. 1861.	Ebert.
5. Paul Richter, geb. zu Dresden den 18. August 1844. (E.)	Ostern 1864.	Menzel.
6. Max Schober, geb. zu Tharand den 18. Mai 1848. (P.)	Mich. 1861.	Pfuhl.
7. Heinrich von Friesen, geb. zu Dresden den 29. October 1847. (E.)	Mich. 1861.	Ebert.
8. Johann Graf von Rantzau, geb. zu Uetersen in Holstein den 16. September 1847. (E.)	Ostern 1863.	Menzel.
9. Kurt Graf von Rantzau, geb. zu St. Petersburg den 12. Dec. 1845. (E.)	Ostern 1863.	Menzel.
10. Eduard Graf von Breza, geb. zu Posen den 27. September 1847. (E.)	Mich. 1861.	Schuman.
11. Bernhard Graf von Bassewitz, geb. zu Bristow bei Teterow in Mecklenburg den 15. April 1846. (E.)	Mich. 1861.	Schuman.
12. Ludwig von Scheel-Plessen, geb. zu Lindholm auf Seeland den 11. September 1848. (P.)	Ostern 1864.	Fleckeisen.

Secunda.

I. Abtheilung.

	Auf- genommen:	Tutoren:
1. Karl Manitus, geb. zu Dresden den 12. März 1848. (E.)	Ostern 1862.	Klein.
2. Theodor Fritzsche, geb. zu St. Petersburg den 24. Mai 1846. (E.)	Mai 1862.	Ebert.
3. Max von Scherer-Scherburg, geb. zu Castell in der Schweiz den 13. Juni 1848. (E.)	Mich. 1861.	Klein.
4. Alfred von Becker, geb. zu Kiew den 22. Mai 1847. (P.)	Ostern 1862.	Fleckeisen.
5. Kurt von Reiswitz, geb. zu Berlin den 6. October 1847. (P.)	Mich. 1864.	Pfuhl.
6. Moritz Graf von Wallwitz, geb. zu Dresden den 13. Decbr. 1846. (P.)	Mich. 1864.	Michael.
*7. Prinz Michael Cantacusin, geb. zu St. Petersburg den 17. Octbr. 1847. (E.)	Mich. 1861.	Schuman.

II. Abtheilung.

1. Paul Körner, geb. zu Dresden den 24. December 1849. (E.)	Mich. 1861.	Menzel.
2. Eduard von Wöhrmann, geb. zu Dresden den 11. Februar 1848. (E.)	Ostern 1863.	Schuman.
3. Victor Madelung, geb. zu Thallwitz bei Wurzen den 30. September 1848.	Ostern 1863.	Menzel.
4. Hugo von Hackewitz, geb. zu Breslau den 4. September 1848. (A.)	Ostern 1858.	Polle.
5. Rudolph Lienau, geb. zu New-York den 21. October 1846. (E.)	Ostern 1864.	Klein.
6. Oskar von Dolega-Kozierowski, geb. zu Herrnhut den 25. Juni 1850. (E.)	Ostern 1864.	Menzel.
7. Georg Argyropulos, geb. zu Athen den 7. October 1847. (E.)	Ostern 1863.	Schuman.
8. Arthur Graf von Keyserling, geb. zu Gaiken in Curland den 7. März 1847. (E.)	Mich. 1861.	Schuman.
9. Hermann von Broizem, geb. zu Leipzig den 5. October 1850. (P.)	Mich. 1864.	Fleckeisen.

Tertia.	Auf- genommen:	Tutoren:
1. Werner von Reitzenstein, geb. zu Dresden den 2. Novbr. 1848. (E.)	Neuj. 1863.	Klein.
2. August Meinert, geb. zu Dresden den 9. Mai 1847. (E.)	Mich. 1863.	Ebert.
3. Georg Häpe, geb. zu Dresden den 24. Juli 1848. (E.)	Ostern 1862.	Schuman.
4. Paul Graf Vitzthum von Eckstädt, geb. zu Oberlichtenau in der Oberlausitz den 5. Juli 1850. (A.)	Mai 1859.	Fleckeisen.
5. Hermann von Schweinitz, geb. zu Dresden den 3. Januar 1851. (A.)	Ostern 1860.	Jancovius.
6. Heinrich Schmaltz, geb. zu Glossen bei Löbau den 10. Octbr. 1848. (P.)	Mich. 1862.	Michael.
7. Emil Koch, geb. zu Borna den 7. August 1851. (A.)	Mich. 1861.	Jancovius.
8. Max von Gersdorff, geb. zu Zörbig bei Halle den 5. Octbr. 1849. (A.)	Ostern 1860.	Jancovius.
9. Magnus Graf zu Solms-Wildenfels, geb. zu Culmitzsch bei Weimar den 26. Juli 1847. (E.)	Mich. 1861.	Klein.
10. Hermann Liebner, geb. zu Kiel den 26. Mai 1849. (E.)	Ostern 1862.	Menzel.
11. Prinz Georg Lwow, geb. zu Moskau den 9. August 1850. (E.)	Mich. 1861.	Schuman.
12. Max von Heygendorff, geb. zu Dresden den 19. Septbr. 1850. (P.)	Ostern 1864.	Fleckeisen.
13. Reinhard von Seydlitz, geb. zu Berlin den 20. October 1850. (E.)	Ostern 1864.	Schuman.
* 14. Albrecht von Oertzen, geb. z. Alt-Pohrsdorf bei Wismar d. 3. Juni 1850. (E.)	Mich. 1861.	Klein.
* 15. Anton von Sophianos, geb. zu Warschau den 4. März 1848. (E.)	Neuj. 1863.	Klein.
* 16. Heinrich Graf von Keyserling, geb. zu Gaiken in Curland den 19. September 1848. (E.)	Mich. 1861.	Schuman.
17. Demetrius Graf de Lunzi, geb. zu Zante den 19. März 1848. (E.)	Mich. 1864.	Menzel.
18. Charles Edwards, geb. zu Elisabeth im Staate New-Jersey den 24. Januar 1849. (E.)	Mich. 1864.	Klein.
19. Adolph Graf von Wallwitz, geb. zu Dresden den 15. Januar 1848. (P.)	Mich. 1864.	Michael.

Quarta.

	Auf- genommen:	Tutoren:
1. Kurt Leonhardi-Aster, geb. zu Dresden den 17. April 1851. (E.)	Ostern 1863.	Klein.
2. Paul Freiesleben, geb. zu Dresden den 1. Juli 1852. (E.)	Ostern 1863.	Schuman.
3. Oskar Schumann, geb. zu Doebern den 14. Mai 1851. (E.)	Ostern 1863.	Klein.
4. Haubold von Einsiedel, geb. zu Scharfenstein den 5. Juli 1850. (P.)	Ostern 1864.	Caspari.
5. Ernst Graf von Hohenthal, geb. zu Dölkau bei Leipzig den 9. Septbr. 1849. (P.)	Mich. 1861.	Fleckeisen.
6. Hans von Carlowitz, geb. zu Rochlitz den 27. April 1851. (P.)	Mich. 1861.	Michael.
7. Hans Heymann, geb. zu Dresden den 17. October 1853. (E.)	Ostern 1862.	Menzel.
8. Jean Basile Cantacuzène, geb. zu Jassy in der Moldau den 21. Jan. 1851. (E.)	Mich. 1862.	Klein.
9. Albert Häpe, geb. zu Dresden den 20. Juli 1850. (A.)	Ostern 1862.	Michael.
10. Arthur von Knebel-Döberitz, geb. zu Dietersdorf bei Falkenburg in Pommern den 6. März 1851. (P.)	Ostern 1862.	Michael.
11. Alfred von Carlsburg, geb. zu Starzeddel bei Guben den 20. Decbr. 1848. (P.)	Ostern 1863.	Polle.
12. Georg Graf zur Lippe, geb. zu Baruth den 27. Mai 1850. (P.)	Neuj. 1864.	Pfuhl.
13. Georg Weltz, geb. zu Löbau den 26. Januar 1851. (E.)	Ostern 1864.	Klein.
14. Hans von Knebel-Döberitz, geb. zu Dietersdorf bei Falkenburg in Pommern den 19. April 1849. (P.)	Ostern 1862.	Michael.
15. Kurt Meisel, geb. zu Dresden den 25. Januar 1851. (A.)	Mich. 1862.	Pfuhl.
16. Alexander Kummer, geb. zu Dresden den 10. Juni 1850. (E.)	Ostern 1864.	Schuman.
17. Arthur Spindler, geb. zu Dresden den 14. April 1850. (E.)	Ostern 1863.	Klein.
18. Richard Feller, geb. zu Bautzen den 5. Februar 1852. (E.)	Ostern 1864.	Klein.
19. Bernhard John, geb. zu Ellefeld den 7. September 1850. (E.)	Mich. 1864.	Ebert.

	Auf- genommen:	Tutoren:
20. Woldemar von Seidlitz, geb. zu St. Petersburg den 20. Mai 1850. (E.)	Mich. 1864.	Menzel.
21. Fedor Hirschfeld, geb. zu Möglin in Holstein den 14. Mai 1848. (E.)	Mich. 1864.	Klein.

Quinta superior (A).

1. Leo von Montbé, geb. zu Oppach bei Neusalza den 18. Mai 1852. (A.)	Mich. 1862.	Michael.
2. Georg Winter, geb. zu Dresden den 26. Mai 1853. (E.)	Ostern 1863.	Klein.
3. Wolfram Gilbert, geb. zu Bautzen den 7. November 1852. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.
4. Albert Mangelsdorff, geb. zu Wurzen den 15. December 1852. (E.)	Ostern 1862.	Klein.
5. Georg Hohlfeldt, geb. zu Schandau den 5. Januar 1852. (E.)	Ostern 1862.	Ebert.
6. Paul Mehnert, geb. zu Klösterlein bei Aue den 7. Mai 1852. (E.)	Mich. 1861.	Klein.
7. Konrad Bürkner, geb. zu Dresden den 28. Januar 1853. (E.)	Ostern 1864.	Menzel.
8. Friedrich Stallknecht, geb. zu New-York den 4. Juli 1848. (P.)	Ostern 1864.	Polle.
9. Alfred Kuntze, geb. zu Dresden den 12. Januar 1852. (E.)	Mich. 1861.	Ebert.
10. Georg von Tronchin, geb. zu Paderborn den 19. Juni 1851. (A.)	Sept. 1860.	Polle.
11. Tycho von Löbenstein, geb. zu Lohsa bei Hoyerswerda den 12. Januar 1851. (P.)	Mich. 1863.	Pfuhl.
12. Oskar von Alvensleben, geb. zu Gohlis bei Leipzig den 16. Januar 1853. (P.)	Ostern 1864.	Jancovius.
13. Hans Andreae, geb. zu Berlin den 24. Januar 1854. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.
14. Friedrich Ficinus, geb. zu Dresden den 3. October 1852. (E.)	Ostern 1863.	Ebert.
15. Guido von Löbenstein, geb. zu Lohsa bei Hoyerswerda den 12. Januar 1851. (P.)	Mich. 1863.	Pfuhl.
16. Georg Klemm, geb. zu Leipzig den 29. Mai 1852. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.

	Auf- genommen :	Tutoren :
17. Friedrich Müller, geb. zu Dresden den 30. Septbr. 1853. (E.)	Mich. 1861.	Ebert.
18. Arno von Arnim, geb. zu Planitz bei Zwickau den 8. Juli 1851. (P.)	Ostern 1864.	Polle.
19. Karl Krafft, geb. zu Moskau den 6. September 1851. (E.)	Mich. 1864.	Ebert.
20. Johann Stemler, geb. zu St. Petersburg den 5. November 1851. (E.)	Mich. 1864.	Schuman.

Quinta inferior (B).

1. Constantin Hempel, geb. zu Pulsnitz den 16. Februar 1853. (E.)	Ostern 1862.	Menzel.
2. Hartwich von Unwerth, geb. zu Lichtenwaldau in Schlesien den 10. December 1850. (A.)	Mai 1860.	Polle.
3. Heinrich Madelung, geb. zu Thallwitz bei Wurzen den 8. Decbr. 1852. (E.)	Neuj. 1863.	Menzel.
4. Ernst Richter, geb. zu Freiberg den 28. Mai 1851. (P.)	Ostern 1863.	Pfuhl.
5. Rudolph Ihle, geb. zu Freiberg den 14. August 1851. (P.)	Ostern 1863.	Pfuhl.
6. AlexandervonAlexandroff, geb. zu Nischnei-Nowgorod d. 30. Juni 1851. (E.)	Ostern 1863.	Schuman.
7. Alexander von Galachoff, geb. zu St. Petersburg d. 30. Aug. 1850. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.
8. Harold Gruner, geb. zu London den 10. Juli 1853. (E.)	Mich. 1863.	Menzel.
9. Ernst Madelung, geb. zu Thallwitz bei Wurzen den 27. Mai 1854. (E.)	Neuj. 1863.	Menzel.
10. Heinrich Schuman-Leclercq, geb. zu Dresden den 12. Novbr. 1852. (E.)	Mich. 1863.	Schuman.
11. Friedrich von Ockel, geb. zu St. Petersburg den 30. April 1854. (E.)	Mich. 1863.	Ebert.
12. Edgar Graf Vitzthum von Eckstädt, geb. zu Gotha den 18. Aug. 1853. (A.)	Mich. 1862.	Jancovius.
13. Max Schaller, geb. zu Magdeburg den 8. November 1852. (E.)	Mich. 1863.	Ebert.
14. Woldemar Rosalion von Sachalski, geb. zu Wladimirowka, Gouvernement Charkow, den 18. Juli 1852. (E.)	Ostern 1864.	Schuman.

	Auf- genommen:	Tutoren:
15. Oloff de Wet Fehrszen, geb. zu Graff Reinet im Caplande den 12. Octbr. 1851. (E.)	Mich. 1864.	Schuman.
16. James de Wet Fehrszen, geb. zu Cap- stadt den 11. April 1853. (E.)	Mich. 1864.	Schuman.
17. Erich Schultze, geb. zu Müsselmow bei Schwerin den 13. Jan. 1854. (E.)	Mich. 1864.	Menzel.

Sexta.

1. Johannes von Sophianos, geb. zu War- schau den 20. Mai 1853. (E.)	Ostern 1864.	Klein.
2. Franz Vitzthum von Eckstädt, geb. zu Hermannsdorf in Schlesien den 22. November 1854. (A.)	Ostern 1864.	Fleckeisen.
3. Johann Hohlfeldt, geb. zu Schandau den 9. März 1853. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.
4. Friedrich Schuman-Leclerq, geb. zu Dresden den 16. Decbr. 1854. (E.)	Mich. 1863.	Schuman.
5. Friedrich von Oertzen, geb. zu Alt- Pohrsdorf bei Wismar den 1. Juni 1853. (P.)	Ostern 1864.	Jancovius.
6. Georg Kuntze, geb. zu Dresden den 26. Juli 1853. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.
7. Otto Andreae, geb. zu Berlin den 15. Mai 1855. (E.)	Ostern 1864.	Ebert.
8. Alfred Müller, geb. zu Dresden den 1. Juni 1854. (A.)	Ostern 1864.	Caspari.
9. Hugo Vitzthum von Eckstädt, geb. zu Dresden den 20. Febr. 1854. (A.)	Ostern 1864.	Caspari.
10. Egon von Hartmann, geb. zu Gross- welka bei Bautzen den 8. Septbr. 1850. (P.)	Ostern 1864.	Pfuhl.
11. Alfred Lehmann, geb. zu Dresden den 7. April 1853. (E.)	Mich. 1864.	Menzel.
12. Georg Pilling, geb. zu Dresden den 4. Juni 1854. (E.)	Mich. 1864.	Ebert.

Die von dem Unterrichte im Griechischen dispensierten Schüler nehmen ebenso wie die neu aufgenommenen die letzten Plätze ein. Vor den Namen jener steht in dem obigen Verzeichnis ein *

Zur Chronik des Gymnasiums.

Bei dem Rückblick auf das verflossene Schuljahr gedenke ich zunächst der bedeutenden baulichen Veränderungen, welche mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Schule überhaupt und des Alumnats insbesondere in den weiten Räumen unserer Anstalt im Spätsommer und Herbst v. J. ausgeführt worden sind. Mit diesem umfangreichen und wesentlichen Umbau wurde ein Gedanke zum vollständigen Abschluss gebracht, welcher schon bei der Reorganisation des Gymnasiums gefasst worden war, damals aber wegen der Kürze des für die äussere wie innere Umgestaltung bestimmten Zeitraums nur zum Theil verwirklicht werden konnte, der Gedanke, alle ihrem Zweck nach zusammengehörigen Räume auch in äusserlichen Zusammenhang zu bringen, zuverlässigere, leichtere und bequemere Verkehrsverbindungen im Hause herzustellen, überall Helligkeit zu befördern, vor allem reine Luft zu schaffen, welche für die Gesundheit der in der körperlichen Entwicklung begriffenen Schüler unentbehrlich ist, und durch angemessene Einrichtungen sowohl Reinlichkeit und Ordnung herbeizuführen, als auch dem Aeusseren gefällige und für das Auge wohlthuende Formen zu verleihen.

Indem ich es mir nur ungern versage, auf die Einzelheiten des umfangreichen Baues einzugehen, dessen Zweckmässigkeit von Seiten einsichtiger Besucher unsers Hauses und hochstehender Sachkundiger gerechte Würdigung und Anerkennung gefunden hat, fühle ich mich ebenso verpflichtet wie von Herzen gedrungen, dem Herrn Administrator Grafen *Vitzthum von Eckstädt* für die thätige und einsichtsvolle, auf das Heil und die gedeihliche Entwicklung des Gymnasiums gerichtete Fürsorge öffentlich meinen Dank auszusprechen.

Auch in anderer Hinsicht ist das vergangene Jahr für uns ereignissreich gewesen. Zunächst erfolgte zu Ostern die schon im vorjährigen Programm S. 83 und 84 angekündigte und motivierte Theilung der Quinta in zwei getrennte Classen. Zur Verwaltung der neuen Oberlehrerstelle, deren Gründung durch die Errichtung der Quinta inferior (B) bedingt war, wurde der Dr. phil. *Max Jancovius* von dem Herrn Administrator gewählt und diese Wahl von dem hohen Königlichen Ministerium des Cultus und öffentlichen Unterrichts bestätigt.

Max Victor Jancovius, geboren im Monat November 1837 zu Penig im Königreich Sachsen, erhielt seinen ersten Unterricht in einer Privatschule seiner Vaterstadt. Am 1. Mai 1851 wurde er in die Fürstenschule zu Grimma aufgenommen, welche er am 26. März 1857 nach bestandener Maturitätsprüfung verliess. 1857—1859 studierte er in Erlangen, 1859—1861 in Leipzig Philologie, und erwarb sich auf letzterer Universität die philosophische Doctorwürde. Nach bestandenen Staatsexamen trat er als Lehrer an dem Minterschen Knabeninstitut in Ludwigslust im Grossherzogthum Mecklenburg-Schwerin ein. Ostern 1863 übernahm er provisorisch eine Stelle am Gymnasium zu Parchim. Michaelis desselben Jahres kehrte er in seine Heimat, zunächst in das Haus seiner Eltern, zurück.

Ferner wurde die Vervollständigung des Lehrercollegiums nothwendig durch den zu Ostern v. J. erfolgten Abgang des zweiten Religionslehrers und Ordinarius von Sexta Herrn Dr. phil. *Schickedantz*, welcher sich durch seinen Unterricht und durch die herzliche Theilnahme an den Angelegenheiten der seiner Aufsicht und Leitung anvertrauten Zöglinge die Zuneigung und Liebe derselben und durch die Vielseitigkeit seiner Kenntnisse und die Biederkeit seines Charakters die Achtung seiner Collegen erworben hatte. Derselbe begab sich nach Vevey, um fernerhin als Lehrer an der Unterrichts- und Erziehungsanstalt des Herrn Dr. Sillig zu wirken. An die erledigte Stelle wurde der Candidatus theol. *Kurt Caspari* berufen und auch diese Berufung höheren Orts bestätigt.

Kurt Caspari, geboren den 11. September 1839 zu Annaberg im sächsischen Erzgebirge, erhielt seinen ersten Unterricht in der Bürgerschule zu Plauen und besuchte dann von Michaelis 1850 bis dahin 1858 das Gymnasium daselbst. Von hier aus bezog er die Universität Leipzig, um Theologie zu studieren. Nachdem er zu Ostern 1862 das Examen pro candidatura et licentia contionandi bestanden, wandte er sich nach Dresden und war als Lehrer an der Rathstöchterschule bis Ostern 1864 thätig. Michaelis desselben Jahres bestand er vor dem Königlichen evangelischen Landesconsistorium zu Dresden das Examen pro candidatura reverendi ministerii.

Bei der in herkömmlicher Weise mit Gesang und Gebet abgehaltenen Feier der Eröffnung des Schuljahres am 5. April wurden beide in ihre resp. Aemter durch eine Rede des Unterzeichneten eingeführt, in welcher er das Verhältniss des christlichen Religionsunterrichtes zu dem Unterrichte in den altclassischen Sprachen nachzuweisen suchte.

Da in Folge des unerwartet raschen Wachsthums der Schülerzahl und der damit zusammenhängenden Errichtung der Quinta inferior die Arbeit des Lehrers der französischen Sprache, Herrn Prof. *Schuman-Leclercq* sich um ein Bedeutendes hätte vermehren müssen und die Correcturen durch alle sieben Classen unmöglich

mit der von ihm stets beobachteten eingehenden Gründlichkeit und Genauigkeit hätten besorgt werden können, so wurde ein Hülfslehrer der französischen Sprache in der Person des Herrn *George Klin* angestellt, welcher zu Thalsbourg im Departement de la Meurthe den 22. Februar 1840 geboren und zu Paris erzogen und gebildet ist. Diesem wurde der betreffende Unterricht in der genannten neuen Classe und in Sexta, sowie die Nachhülfe für solche Schüler übertragen, welche den Standpunkt ihrer Classen im Französischen noch nicht ganz erreicht hatten.

Eine neue Einrichtung, welche sich durch die Erfahrung als höchst segensreich und entwicklungsfähig erwiesen hat, trat mit dem 26. Mai v. J. zum ersten Mal ins Leben: die freien Arbeits- oder Studiertage, welche nicht dem Unterrichte, sondern dem Selbststudium der Schüler gewidmet waren. Im Sommerhalbjahre blieb diese Einrichtung auf die beiden obersten Classen beschränkt; da sie sich aber wohl bewährt hatte, so wurde sie von Michaelis ab auch auf Tertia ausgedehnt. Dergleichen Arbeitstage fanden für die Primaner und Secundaner alle zwei Wochen in der Weise Statt, dass in einem bestimmten Turnus nach und nach jeder einzelne Tag der Woche an die Reihe kam; für Tertia dagegen traten sie vorläufig nur einmal im Monat ein; auch wurden den Schülern dieser Classe die Gegenstände der Privatstudien (Lectüre des Cornelius Nepos und mathematische Themata) bestimmt und die Art und Weise der Beschäftigung für diese schulfreie Zeit vorgeschrieben, während in Secunda und Prima der eigenen Thätigkeit der Schüler in dem Grade, als sich der Kreis ihrer Kenntnisse erweiterte, ein immer grösserer Spielraum gewährt und ihnen in Beziehung auf die zu lesenden Schriftsteller und Schriften nur Rathschläge ertheilt, die Wahl aber ebenso wie das Mass der Lectüre ihnen selbst überlassen wurde. Die Secundaner wurden vorzüglich auf Homer hingewiesen; in Prima erstreckte sich die freie Selbstthätigkeit theils auf denselben Dichter, theils auf Sophokles, Euripides und Demosthenes; im Lateinischen wurde und war sie vor allem auf Cicero, ausserdem auf Terentius, Tibullus, Sallustius, Livius und Suetonius gerichtet. Unmittelbar nach den Studiertagen forderten die Ordinarien genaue Rechenschaft von allen Schülern über die Anwendung derselben, nachdem sie sich von einem jedem ein Heft hatten einliefern lassen, in welchem ein Verzeichniss der gelesenen Partieen mit Auszügen und der nicht verstandenen Stellen enthalten sein musste, erklärten ihnen die nicht verstandenen Stellen oder liessen dieselben erklären und suchten überhaupt mit besonderer Berücksichtigung und Achtung der Neigungen und der sich hier und da aussprechenden Individualität durch Unterstützung mit Rath, durch Belehrung, Ermahnung, Aufmunterung, lobende Anerkennung das Streben und den Eifer der Schüler anzufachen und lebendig zu erhalten. Die Vor-

theile liessen sich an unserer Jugend schon jetzt erkennen. Bereicherung derselben mit einem brauchbaren Vorrathe von nützlichen Kenntnissen und Anschauungen, Lust und Freudigkeit zu und an der Arbeit, Liebe zur Wissenschaft überhaupt und zu den altclassischen Sprachen insbesondere, freiere Regung und Aeusserung der Individualität, Ausbildung und Entwicklung der Selbständigkeit: das sind die aus jener freien Thätigkeit gewonnenen unschätzbaren Früchte, welche dem Jüngling auch jenseits der Schulzeit zu gute kommen werden.

Im Spätsommer war Professor *Schuman-Leclercq* durch ein hartnäckiges Augenübel genöthigt, einen vierwöchentlichen Urlaub zu nehmen. Im Uebrigen erfreute sich das Lehrercollegium einer guten Gesundheit. Auch unter den Schülern war der Gesundheitszustand ein befriedigender. Nur hatte nach Neujahr die in Dresden herrschende Masernepidemie mehrere derselben ergriffen; sie sind indessen mit Gottes Hülfe sämmtlich wieder hergestellt.

Am 6. November ertheilte der geheime Kirchenrath und Hofprediger Herr Dr. *Langbein* den Lehrern mit ihren Familien und den eingesegneten Zöglingen in der evangelischen Hof- und Sophienkirche das heilige Abendmahl.

Am 26. November wurden durch den Beschluss des Lehrercollegiums zwei Zöglinge wegen grober Gesetz- und Ordnungswidrigkeiten, wegen hartnäckiger Lügen und wegen ihres dem Ganzen schädlichen Einflusses mit Genehmigung des hohen Königlichen Ministeriums des Cultus und öffentlichen Unterrichts von dem Internat und der Schule excludiert.

Die in der Aula des Gymnasiums abgehaltene Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs am 12. December wurde mit Chorgesang und einem Gebete des Oberlehrers *Michael* eröffnet. Sodann folgten mehrere selbstgefertigte Vorträge von Primanern des Gymnasiums. *Heinrich von Friesen* aus Dresden sprach ein deutsches Festgedicht. *Max Schober* aus Tharand schilderte in deutscher Rede die Theilnahme der sächsischen Truppen unter ihrem Kurfürsten Johann Georg III. an dem Entsatze der Kaiserstadt Wien von der Belagerung durch die Türken im Jahr 1683, und *Karl von Friesen* aus Dresden sprach in lateinischer Rede über den Charakter des Odysseus in den beiden Sophokleischen Dramen Aias und Philoktetes. *Ferdinand Bode* aus Dresden recitierte die Parodos aus der „Antigone“. Als Festredner aus dem Kreise des Lehrercollegiums gab Dr. *Menzel* eine historische Darstellung des Lebens des grössten deutschen Lyrikers aus dem Mittelalter, Walther von der Vogelweide, und eine Charakteristik der Dichtungen desselben. Zum Schluss wurde das von Pfeffel gedichtete und von Rink in Musik gesetzte Hallelujah von dem Sängchor des Gymnasiums ausgeführt. Mittags fand ein Festessen sämmtlicher Lehrer und internen Zöglinge in dem Speisesaale Statt.

Eins der erfreulichsten Ereignisse für die Schule war der Besuch, mit welchem *Se. Majestät der König* in Begleitung Sr. Excellenz des Herrn Staatsministers Dr. von *Falkenstein* das Gymnasium am 18. März beehrte. Nachdem *Se. Majestät* von dem Königl. Commissarius Herrn Geheimen Kirchenrath Dr. von *Zobel*, dem Herrn Administrator *Grafen Vitzthum von Eckstädt* und dem versammelten Lehrercollegium ehrfurchtsvoll begrüsst worden war, wohnte Allerhöchstder- selbe dem Unterrichte in allen Classen bei und geruhete unter Führung des Herrn Administrators und des Unterzeichneten die neuen Einrichtungen und die Sammlungen der Anstalt in Augenschein zu nehmen.

Aufgenommen wurden zu Ostern 28, zu Michaelis 16 neue Schüler, so dass zu Anfange des Wintersemesters der gesammte Cötus aus 121 Schülern bestand. Abgegangen sind im Laufe des vergangenen Jahres:

aus Prima: *Heinrich Graf Breza* von hier, um in die Kaiserl. österreichische Armee einzutreten;

aus Secunda: *Alexander Halpert* aus Weimar, um sich privatim weiter unterrichten zu lassen;

aus Tertia: *Johannes Hempel* von hier, aus Gesundheitsrück- sichten;

aus Quarta: *Anatole Kroupenski* aus Kichineff, um mit seinen Eltern nach seiner Heimath Bessarabien zurückzukehren;

Hubert Brooke aus Avening in Clostershire, um seinen Eltern nach England zu folgen;

Karl Graf zu Solms-Wildenfels aus Wildenfels, aus Gesund- heitsrücksichten;

Albert Schmaltz aus Glossen bei Löbau, um in das hiesige Königliche Cadettencorps einzutreten;

aus Quinta A: *Michael Kroupenski*, Bruder des Anatole Krou- penski; s. oben.

Die am 23. März abgehaltene Maturitätsprüfung, bei welcher *Se. Excellenz der Herr Staatsminister Dr. von Falkenstein* eine Zeit lang anwesend war, bestanden fünf Primaner:

Hans von Unwerth aus Storkow in Pommern erhielt die Censur I^b in litteris, I in moribus;

Leonhard von Egloffstein aus Weimar II in litteris, I in moribus;

Ernst Bode von hier III in litteris, II in moribus;

Karl von Friesen von hier II in litteris, I in moribus;

Paul Richter von hier II^a in litteris, I in moribus,

Sammlungen und Lehrapparate.

Der Bibliothek (verwaltet von dem Conrector Prof. Dr. *Fleckeisen*) wurden folgende Geschenke gemacht, für welche ich im Namen des Gymnasiums den verbindlichsten Dank ausspreche:

vom Herrn Verlagsbuchhändler *Karl Rümpler* in Hannover:

- 1) Armand, Carl Scharnhorst. Abenteuer eines deutschen Knaben in Amerika. Hannover 1863.
- 2) Aus Palast und Hütte. Erzählungen, Fabeln etc. Ebendaselbst 1863.
- 3) Tellkampf, die Franzosen in Deutschland. Ebendas. 1863.
- 4) Colshorn, die deutschen Freiheitskriege. Ebendas. 1863.

Vom Herrn Appellationsgerichts-Vicepräsidenten Dr. *Stieber* in Budissin:

dessen Schrift: Die wahre Gestalt der Planeten- und Kometenbahnen. Dresden 1864.

Vom *Lehrercollegium*:

Zarnckes litterarisches Centralblatt. Leipzig 1864.

Die aus den laufenden Fonds für die Bibliothek gemachten Ankäufe, welche sich diessmal grossentheils auf Completierung vorhandener Werke beschränkte, werde ich mit denen des kommenden Jahres in dem nächsten Programm aufführen.

Das Naturaliencabinet (unter Aufsicht des Oberlehrers Dr. *Ebert*) erfuhr folgenden Zuwachs durch Ankauf: ein Skelet des *Tropidonotus natrix*, ein desgleichen des *Triton cinereus* und des *Cyprinus carpio*, einen Schädel des *Erinaceus europaeus*, einen desgl. der *Talpa europaea* und des *Mus decumanus*.

Zur Vermehrung des physikalischen Cabinets (unter Aufsicht des Oberlehrers Dr. *Klein*) wurden folgende Gegenstände neu angeschafft:

- 1) ein Nörrembergischer Polarisationsapparat,
- 2) Frauenhofersche Gitter,
- 3) Nicholsons Aräometer,
- 4) Haldats Apparat,
- 5) eine Zink-Eisen-Batterie mit 8 Elementen,
- 6) ein Wasserzersetzungsgapparat,
- 7) ein Apparat zur Zersetzung von Salzen,
- 8) eine Franklinsche Tafel,
- 9) eine Blitztafel,
- 10) ein Glockenspiel,
- 11) ein Inductionsapparat (Schlittenapparat),
- 12) eine magneto-elektrische Rotationsmaschine.

Ausserdem sind an vielen Apparaten gründliche Reparaturen und Erneuerungen vorgenommen worden.

Verzeichnis

der am Vitzthumschen Gymnasium eingeführten Lehr-
bücher und Ausgaben für das Sommersemester 1865.

Sexta.

Dresdner Gesangbuch.

Neustrelitzer Katechismus.

Zahns biblische Historien, kleine Ausg. (Moers, Rheinische Buchhdlg.).

Middendorf u. Grüter latein. Schulgrammatik, 1. Thl. (Münster, Coppen-
rath).

Jacobs u. Döring latein. Elementarbuch. 1. Bdchn. (Jena, Frommann).

Georg französ. Elementargrammatik (Genf, Müller-Darier).

Seinecke premières lectures françaises (Hannover, Ehlermann).

Regeln und Wörterverzeichnis für deutsche Rechtschreibung (Leipzig,
B. Schlicke).

Masius deutsches Lesebuch. 1. Thl. (Halle, Waisenhaus).

Hentschel Zifferrechnen. 1. 2. Heft (Leipzig, Merseburger).

Dielitz Grundriss der Weltgeschichte (Berlin, Duncker u. Humblot).

Schaefer Geschichtstabellen (Leipzig, Arnold).

Daniel Leitfaden f. d. Unterricht in der Geographie (Halle, Waisen-
haus).

Ein Atlas, entweder der kleine von Stieler (Gotha, J. Perthes) oder
der von Liechtenstern und Lange (Braunschweig, Westermann)
oder der von Sydow (Gotha, J. Perthes).

Ausserdem wünschenswerth:

Fr. Wiggert Vocabula linguae latinae primitiva (Magdeburg, Creutz).

Quinta B.

Dieselben Bücher, wie in Sexta, ausserdem:

Schillings kleine Schul-Naturgeschichte (Breslau, Hirt).

Seinecke secondes lectures françaises (Hannover, Ehlermann).

Quinta A.

Dieselben Bücher, wie in Quinta B; ausserdem:

Krüger griechische Sprachlehre für Anfänger (Berlin, K. W. Krüger).

Halm Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen ins Griechische.

1. Thl. 1. Cursus (München, Lindauer).

Halm griechisches Lesebuch (ebend.).

Klein Leitfaden zu den Elementen der Geometrie. 1. Thl. (Dresden, Selbstverlag).

Quarta.

Dresdner Gesangbuch.

Neustrelitzer Katechismus.

Bibel.

Middendorf und Grüter latein. Grammatik 1. Thl.

Jacobs u. Döring latein. Elementarbuch. 2. Bdchn.

Cornelius Nepos v. Siebelis (Leipzig, Teubner).

Pfuhl latein. Dichterschule (Leipzig, Baumgärtner).

Georges latein. Handwörterbuch.

Krüger griech. Sprachlehre für Anfänger.

Halm Anleitung zum Uebers. aus d. Deutschen ins Griech. 1. Thl.

1. 2. Cursus.

Halm griech. Lesebuch.

Plötz lectures choisies (Berlin, Herbig).

Regeln und Wörterverzeichniss für deutsche Rechtschreibung (Leipzig, B. Schlicke).

Masius deutsches Lesebuch. 1. Thl.

Heis Aufgaben aus der Arithmetik (Köln, Du Mont-Schauberg).

Klein Leitfaden der Geometrie. I.

Dielitz Abriss der Weltgeschichte.

Schaefer Geschichtstabellen.

Kiepert Atlas der alten Welt (Weimar, geogr. Institut).

Daniel Leitfaden der Geographie.

Stielers oder Liechtenstern u. Langes oder Sydows Atlas.

Ausserdem wünschenswerth:

Wöckel die Geometrie der Alten (Nürnberg, Bauer und Raspe).

Tertia.

Dresdner Gesangbuch.

Neustrelitzer Katechismus.

Bibel.

Middendorf u. Grüter latein. Grammatik. 2. Thl.

Süpfle Aufgaben zu latein. Stilübungen. 1. Thl. (Karlsruhe, Ch. Th. Groos).

Caesar Bellum Gallicum von Kraner (Berlin, Weidmann) oder von Doberenz (Leipzig, Teubner) oder die Textausgabe von Nipperdey (Leipzig, Breitkopf u. Härtel).

Ovids Metamorphosen, Auswahl von Siebelis (Leipzig, Teubner).

Georges latein. Handwörterbuch.

Krüger griech. Sprachlehre für Anfänger.

Halm Anleitung zum Uebersetzen aus d. Deutschen ins Griech. 1. Thl. 2. Cursus.

Griech. Wörterbuch von Jacobitz und Seiler (Leipzig, Hinrichs); griech.-deutsches auch von Benseler (Leipzig, Teubner).

Xenophons Anabasis von Vollbrecht (Leipzig, Teubner) oder von Krüger (Berlin, K. W. Krüger).

Homers Odyssee von Fäsi (Berlin, Weidmann) oder von Ameis (Leipzig, Teubner).

Noël et Chapsal nouvelle Grammaire Française (Paris, Marie-Nyon).

Noël et Chapsal Exercices (ebend.).

Plötz Lesebuch der franz. Sprache. 2. Cursus (Berlin, Herbig).

Französisches Wörterbuch v. Schuster u. Regnier.

Voltaire Charles XII.

Kade erste Anleitung zum Uebersetzen ins Englische (Leipzig, G. Mayer).

Herrig the British Classical Authors from Chaucer to the present time (Braunschweig, Westermann).

Masius deutsches Lesebuch. 2. Thl.

Heis Aufgaben aus der Arithmetik.

Klein Leitfaden der Geometrie. 1. 2. Thl.

Dielitz Grundriss der Weltgeschichte.

Schaefer Geschichtstabellen.

Kiepert Atlas der alten Welt.

Daniel Leitfaden der Geographie.

Stielers, Liechtenstern und Langes oder Sydows Atlas.

Ausserdem wünschenswerth:

Wöckel Geometrie der Alten.

Secunda.

Dresdner Gesangbuch.

Bibel.

Lateinisches Wörterbuch u. Grammatik wie in Tertia.

Seyffert Uebungsbuch zum Uebersetzen ins Lateinische f. Secunda
(Leipzig, Holtze).

Ciceros ausgewählte Reden von Halm, 1. Bdchen (Berlin, Weidmann).

Livius von Weizenborn, Bd. 5 in der Weidmannschen Ausgabe.

Sallustius von Jacobs (Berlin, Weidmann).

Vergilius Aeneide, von Ladewig (Berlin, Weidmann) oder von Wagner (Leipzig, Hahn).

Griechisches Wörterbuch und Grammatik wie in Tertia.

Halm Anleitung zum Uebers. aus d. Deutschen ins Griech. 2. Thl.
1. Cursus.

Homer Ilias von Fäsi (Berlin, Weidmann).

Lysias ausgewählte Reden von Rauchenstein (Berlin, Weidmann) oder
Lysiae orationes ed. Scheibe (Leipzig, Teubner).

Noël et Chapsal grammaire française.

Noël et Chapsal Exercices.

Littérature de l'adolescence par A. Vinet (Lausanne, G. Bridel).

Kade erste Anleitung zum Uebersetzen ins Englische.

Herrig the British Classical Authors.

Viehoff Handbuch der deutschen Nationallitteratur. 3 Bde. (Braunschweig, Westermann).

Das Nibelungenlied herausg. von Zarncke (Leipzig, G. Wigand).

Heis Aufgaben aus der Arithmetik.

Klein Leitfaden der Geometrie. 2. Heft.

Dielitz Grundriss der Weltgeschichte.

Schaefer Geschichtstabellen.

Kiepert Atlas der alten Welt.

Stielers, Liechtenstern und Langes oder Sydows Atlas.

Prima.

Dresdner Gesangbuch.

Bibel.

Lateinisches Wörterbuch u. Grammatik wie in Tertia.

Seyffert Materialien zum Uebersetzen etc. (Leipzig, Holtze).

Ciceros ausgewählte Reden von Halm, 6. Bdchen. (Berlin, Weidmann).

Horatii carmina von Nauck und Satiren und Episteln von Krüger
(beides Leipzig, Teubner).

Griech. Wörterbuch wie in Tertia.

Krüger griech. Grammatik für Schulen (Berlin, K. W. Krüger).

Ausgewählte Reden des Isokrates von Rauchenstein (Berlin, Weidmann) oder von O. Schneider 1. Bdchen (Leipzig, Teubner).

Sophokles Elektra von Schneidewin-Nauck (Berlin, Weidmann) oder von Gust. Wolff (Leipzig, Teubner).

La France littéraire par L. Herrig et C. F. Burguy (Braunschweig, Westermann).

Herrig the British Classical Authors.

Viehoff, Handbuch der deutschen Nationallitteratur.

Heis Aufgaben aus der Arithmetik.

Logarithmentafeln (siebenstellige).

Von Textausgaben griechischer und lateinischer Schriftsteller
werden die bei Teubner in Leipzig erschienenen empfohlen.

Bedingungen der Aufnahme

und

allgemeine Bestimmungen für die Schüler und Zöglinge des Vitzthumschen Gymnasiums.

Zum Eintritt in die unterste Classe (Sexta) gehört ein Alter von 9 Jahren, Sicherheit und Fertigkeit im Lesen des Deutschen und Lateinischen, einige Uebung im Nachschreiben des Dictierten in beiderlei Schrift, so wie im Rechnen Sicherheit in den vier Species. Die Bestimmung der Classe für weiter vorgerückte Schüler geschieht nach einer vor dem Anfange des Lehrkursus mit ihnen durch das Lehrercollegium vorgenommenen Prüfung.

In das Internat werden den ursprünglichen testamentarischen Bestimmungen zufolge nur Knaben des evangelisch-lutherischen Glaubensbekenntnisses als Zöglinge aufgenommen. Dagegen können Knaben und Jünglinge anderer christlichen Confessionen an dem Unterrichte im Gymnasium als Extraneer theilnehmen (wenn sie den Nachweis liefern, dass sie Religionsunterricht in ihrer Confession erhalten), und wird der Rector es sich angelegen sein lassen, auf den Wunsch der Eltern für ein angemessenes Unterkommen, besonders bei den Lehrern des Gymnasiums selbst, welche ausserhalb des Hauses wohnen, Sorge zu tragen. Jedenfalls muss dem Rector die Familie, welcher die Schüler von auswärts anvertraut werden sollen, vorher namhaft gemacht und seine Erlaubnis zur Unterbringung der Schüler in derselben eingeholt werden.

An jährlicher Pension sind für einen Zögling des Internats als Stations-, Verpflegungs-, Erziehungs- und Schulgeld

360 Thaler

in einvierteljährigen Raten praenumerando zu entrichten.

Ausserdem sind für einen Internen bei seinem Eintritte fünf Thaler, bei seiner Meldung zur Maturitätsprüfung fünf Thaler und bei Ertheilung eines Abgangszeugnisses, welches nicht Maturitätszeugnis ist, drei Thaler zur Bibliothekscasse zu entrichten.

Es bleibt den Eltern überlassen alle Bedürfnisse für ihre Söhne, als Bücher, Schreibmaterialien und sonstige Lehrmittel, Kleider und andere Erfordernisse selbst zu beschaffen oder die betreffenden Tutoren mit deren Besorgung zu beauftragen. In diesem Falle ist den letzteren am Anfange eines jeden Quartals ein entsprechender Vorschuss einzuhandigen. Auch ist in Uebereinstimmung mit den Tutoren die Höhe des Taschengeldes zu bestimmen, welches diese ihren Tuenden für jede Woche auszahlen sollen.

Das Schulgeld für die Extraneer beträgt jährlich:

a) wenn sie Sachsen sind, 72 Thaler,

b) wenn Nichtsachsen, 100 Thaler,

praenumerando in einvierteljährigen Raten (ohne jedesmalige Liquidation von Seiten der Anstalt) zahlbar.

Hierfür nehmen die Schüler an allen auf dem Lectionsplane verzeichneten Unterrichtsgegenständen Theil.

Die Extraneer haben die von der zu Anfange jedes Semesters abzugebenden Erklärung abhängige Theilnahme an dem facultativen Unterrichte, d. h. im Zeichnen, Fechten, Exercieren und Tanzen besonders zu honorieren, nämlich mit 10 Thalern für das Semester, welche ebenfalls praenumerando zu zahlen sind.

Ausserdem sind für die Extraneer bei deren Aufnahme drei Thaler, bei der Meldung zur Maturitätsprüfung fünf Thaler, bei Ertheilung eines Abgangszeugnisses, welches nicht Maturitätszeugnis ist, drei Thaler zur Bibliothekscasse zu entrichten.

Zur Empfangnahme aller dieser Zahlungen ist der Rector autorisiert.

Sittlich entartete Knaben, sowie solche, welche in Folge anhaltender Trägheit in ihren Leistungen ungenügend sind, können durch den Beschluss des Lehrercollegiums aus dem Gymnasium entfernt werden; nach einem solchen Beschluss steht den Eltern ein Regress an die Anstalt ebenso wenig zu, als sie Ansprüche auf Rückerstattung des praenumerando gezahlten Pensions- und Schulgeldes geltend machen können. Der Abgang eines Schülers muss mindestens 8 Wochen vor Ablauf des Quartals angemeldet werden; im Unterlassungsfalle ist das Pensions- oder Schulgeld für das nächstfolgende Quartal noch zu entrichten.

Der Aufzunehmende hat bei der Anmeldung ein Taufzeugnis, einen Impfschein und, wenn er vorher eine andere Lehranstalt besucht hat, ein Zeugnis von dieser einzureichen.

Bei der Anmeldung von Zöglingen für das Internat wird eine Bescheinigung darüber erbeten, ob dieselben das Scharlachfieber, die Masern, die Blattern, den Keuchhusten gehabt oder eine Disposition zu besondern Krankheiten, wie Bräune u. a. haben.

Mitzubringen hat jeder interne Zögling mindestens 12 Taghemden und 6 Nachthemden, 12 Paar Strümpfe, 12 Schnupftücher, 6 Paar Uuterbeinkleider. Alle diese Gegenstände sowie die Kleidungsstücke müssen gezeichnet sein.

Betten, Bettwäsche, Handtücher und Tischzeug werden von der Anstalt unentgeltlich geliefert.

Jeden Sonntag nach dem Vormittagsgottesdienste findet die Beurlaubung derjenigen Zöglinge Statt, für welche spätestens Tags vorher eine schriftliche Einladung eingegangen ist. Die Zurückkunft und Meldung bei dem Hebdomadarius muss präcis $\frac{1}{2}$ 10 Uhr Abends erfolgen. Zu einem längeren Ausbleiben bedarf es besonderer Erlaubnis.

Schliesslich werden die Eltern und Angehörigen unserer internen Zöglinge dringend gebeten, denselben Geld und Geldeswerth nicht direct, sondern nur durch die betreffenden Tutoren zur Abgabe zukommen zu lassen, desgleichen keinerlei Esswaaren ohne Vorwissen und Genehmigung der Tutoren zuzuschicken.

Ordnung der öffentlichen Prüfungen.

Freitag, den 7. April.

Vormittags von 9 Uhr an.

Gesang.

Gebet des Oberlehrers *Michael*.

Tertia: Religion, Oberlehrer *Michael*.

Prima: Sophokles, *Rector*.

„ Mathematik, Oberlehrer Dr. *Klein*.

„ Französisch, Professor *Schuman-Leclercq*.

Secunda: Cicero pro Milone, Conrector Prof. Dr. *Fleckeisen*.

Nachmittags von 3 Uhr an.

Secunda: Arrianos, Conrector Professor Dr. *Fleckeisen*.

„ Geschichte, Oberlehrer Dr. *Menzel*.

Tertia: Xenophons Anabasis, Professor Dr. *Pfuhl*.

„ Mathematik, Oberlehrer Dr. *Klein*.

Sonnabend, den 8. April.

Vormittags von 9 Uhr an.

Gebet des Collaborators *Caspari*.

Quinta u. Sexta: Religion, Collaborator *Caspari*.

Quarta: Lateinisch, Quartus Dr. *Polle*.

„ Geognosie, Oberlehrer Dr. *Ebert*.

„ Französisch, Professor *Schuman-Leclercq*.

Quinta A: Lateinisch, Oberlehrer *Michael*.

Quinta A u. B: Geographie, Oberlehrer Dr. *Ebert*.

Nachmittags von 3 Uhr an.

Quinta B: Lateinisch, Oberlehrer Dr. *Jancovius*.

„ Französisch, Lehrer *Klin*.

Sexta: Geschichte, Oberlehrer Dr. *Menzel*.

„ Lateinisch, Collaborator *Caspari*.

Gesang, Cantor *Friedrich*.

Valedictionsactus.

Montag den 10. April Vormittags 10 Uhr.

Entlassung der Abiturienten durch den Rector.

Die Prüfung der Aufzunehmenden findet Montag den 24. April von früh 9 Uhr an statt. Der neue Lehrkursus nimmt Dienstag den 25. April Vormittags 8 Uhr seinen Anfang.

Karl Scheibe.

Klein, Hermann

Festigkeit kreisförmig gebogener Körper (Programm des Vitzthumschen
Gymnasiums.) Mit Schulnachrichten

Dresden 1865

Math.a. 127 p

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080834-6